



Università degli Studi di Milano

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea triennale in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Proprietà della materia nucleare e neutronica
con un' interazione efficace
di tipo Yukawa**

Relatore:

Prof. Gianluca Colò

Correlatore:

Dott. Xavier Roca-Maza

Candidato:

Andrea Rancati

Matricola 814717

Indice

Introduzione	x
1 Teoria di campo medio	1
1.1 Sistema a molti corpi	2
1.2 Metodo di Hartree-Fock	3
1.3 Materia nucleare simmetrica e materia neutronica	6
1.4 Proprietà fisiche dei sistemi nucleari e neutronici	8
1.5 Potenziali Yukawiani	12
2 Calcoli di Hartree-Fock	17
2.1 Termine cinetico	17
2.2 Una Yukawa con due parametri liberi in materia nucleare . .	18
2.2.1 Termine diretto	19
2.2.2 Termine di scambio	21
2.2.3 Equazione di stato e derivate	23
2.3 Yukawa con n parametri	25
2.3.1 EoS per una Yukawa con un parametro	25
2.3.2 EoS per somme di più Yukawa	26
2.4 Equazioni di stato per materia neutronica	26
3 Scelta dei parametri e risultati	29
3.1 Una Yukawa con un parametro libero	30
3.2 Somma di due Yukawa con due parametri liberi	34
3.3 Somma di tre Yukawa con tre parametri liberi	35
3.4 Una Yukawa con due parametri liberi	42
3.4.1 Materia nucleare	43
3.4.2 Materia neutronica	46
3.5 Somma di due Yukawa con quattro parametri liberi	48
3.5.1 Materia nucleare	48

3.5.2	Materia neutronica	50
3.6	Somma di tre Yukawa con sei parametri liberi	52
3.6.1	Materia nucleare	52
3.6.2	Materia neutronica	55
3.7	Massa efficace in materia nucleare	58
A	Metodo di Broyden	67
B	Metodo del fit	69
	Conclusione	67

Elenco delle figure

1.1	esempio di andamento dell' interazione tra nucleoni in funzione del range.	14
3.1	grafico per la derivata prima (linea rossa) e per la derivata seconda (linea blu) dell' equazione di stato in funzione di a , con il range fissato a $\mu = 1.4 fm^{-1}$	32
3.2	equazione di stato per materia nucleare in funzione della densità per una Yukawa con un parametro libero.	33
3.3	equazione di stato per materia nucleare in funzione della densità per la somma di due Yukawa con due parametri liberi. . .	34
3.4	equazione di stato per materia nucleare per una Yukawa e tre parametri liberi, fittando l' energia per particella e la pressione. .	37
3.5	equazione di stato in materia nucleare per due e tre Yukawa. .	39
3.6	equazione di stato per materia neutronica.	41
3.7	equazione di stato per una Yukawa e due parametri liberi per diversi valori di μ	45
3.8	grafico per K_∞ in funzione di μ^{-1}	46
3.9	equazione di stato in materia nucleare per due Yukawa e quattro parametri liberi.	50
3.10	equazione di stato in materia nucleare per due e tre Yukawa. .	54
3.11	equazione di stato in materia neutronica.	56
3.12	equazione di stato in materia nucleare fittando tre o cinque equazioni.	57
3.13	grafico della massa efficace in funzione di μ^{-1}	60

Elenco delle tabelle

3.1	dati empirici ed errori nel punto di saturazione.	30
3.2	valori dei parametri (in $MeV \cdot fm$) per la somma di tre Yukawa, calcolati fittando l' equazione di stato e la pressione. . .	36
3.3	valori dei parametri e risultati per la somma di tre Yukawa, calcolati fittando l' equazione di stato, la pressione e l' incompressibilità.	38
3.4	valori dei parametri (in $MeV \cdot fm$) per tre Yukawa trovati fittando ε , P , K_∞ , S , L	40
3.5	risultati per le proprietà fisiche del sistema.	40
3.6	valori per i parametri ($MeV \cdot fm$) e per K_∞ al variare di μ . .	44
3.7	valori per energia di simmetria e per la sua derivata al variare di μ	47
3.8	risultati per le proprietà fisiche utilizzando tutte e cinque le equazioni all' interno del fit con una Yukawa.	48
3.9	valori dei parametri (in $MeV \cdot fm$) trovati fittando ε , P e K . .	49
3.10	risultati per le proprietà fisiche fittando ε , P e K	49
3.11	valori per le proprietà utilizzando tutte e cinque le equazioni per il fit.	51
3.12	valori dei parametri (in $MeV \cdot fm$) trovati fittando ε , P , K_∞ . .	53
3.13	risultati per le proprietà fittando ε , P , K_∞	53
3.14	valori dei parametri (in $MeV \cdot fm$) trovati fittando ε , P , K_∞ , S , L	55
3.15	risultati per le proprietà fittando ε , P , K_∞ , S , L	56
3.16	valori per la massa efficace al variare di μ	59

Introduzione

In fisica nucleare un modello che fornisca una comprensione dell' interazione tra nucleoni nel mezzo nucleare a livello completamente microscopico è tuttora in fase di sviluppo, anche se negli ultimi anni buoni risultati sono stati ottenuti con l' utilizzo di teorie ispirate alla *QCD* (*quantum chromodynamics*).

Idealmente si vorrebbe risolvere il problema nucleare partendo dall' Hamiltoniana associata all' interazione tra due e tre nucleoni, un approccio che prende il nome di *ab initio*. Esistono diverse strategie di questo tipo (per esempio, *Green's Function Monte Carlo* (GFMC) [1], *metodo Brueckner* [2], *No Core Shell Model* (NCSM) [3] o *Coupled-Cluster* (CC) [4]), ma spesso si tratta di modelli che richiedono un' elevata potenza di calcolo. Questo riduce notevolmente il numero di sistemi che possono essere studiati, e l' approccio *ab initio* si dimostra in pratica adatto solamente per trattare i nuclei più leggeri ($A \leq 10 - 15$).

Una valida alternativa per lo studio di alcune proprietà dello stato fondamentale e degli stati eccitati si trova per esempio nell' utilizzo di metodi *SCMF* (*self-consistent mean-field*) [5]. Con questi si riesce infatti a superare il grosso limite riscontrato precedentemente, permettendo così uno studio approfondito anche per i nuclei più pesanti.

Le teorie di campo medio rientrano nel quadro più generale dell' approssimazione di particella indipendente, nella quale le particelle di un sistema a molti corpi vengono inserite all' interno di un campo d' interazione generato da tutte le altre particelle circostanti. Solitamente questo campo viene calcolato con metodi autoconsistenti, per esempio *Hartree-Fock*. La scelta per l' interazione efficace tra particelle è fenomenologica (per esempio vengono introdotti termini dipendenti dalla densità per riprodurre l' effetto dell' interazione a molti corpi), mentre i parametri da cui dipende vengono scelti in modo tale da poter riprodurre alcune proprietà globali del sistema. Per questo lavoro abbiamo scelto di studiare il problema nucleare con un

approccio di tipo *SCMF*, senza considerare termini dipendenti dalla densità. Infatti i limiti di un approccio che utilizzi un'Hamiltoniana senza termini di densità non sono ancora stati completamente esplorati. In particolare ci concentreremo su due sistemi ideali infiniti, vale a dire la materia simmetrica nucleare e la materia neutronica. Nel primo caso si intende un sistema infinito che presenta in egual numero protoni e neutroni, per il quale non si ha polarizzazione in spin. Per materia neutronica si intende un sistema infinito composto da soli neutroni, senza alcun tipo di polarizzazione.

Generalmente per studi di tipo *SCMF* si fa largo uso di potenziali costruiti *ad hoc*. Per esempio vengono utilizzati potenziali a range-zero come *Skyrme* [6] (in cui la forma del potenziale è data dalla funzione delta di Dirac) o potenziali a range-finito come *Gogny* [7] (in cui la forma è data da funzioni di tipo Gaussiane). L'interazione efficace utilizzata per il nostro modello prende la forma da un potenziale ben noto in fisica nucleare ma che solitamente non viene trattato per studi di campo medio, vale a dire un'interazione di tipo *Yukawa*. Questa scelta è stata intrapresa principalmente per capire se a livello di campo medio un potenziale Yukawiano riesca a riprodurre alcune proprietà fisiche per i sistemi considerati, e quali possano essere gli eventuali vantaggi o svantaggi nel trattare questa forma rispetto, per esempio, all'utilizzo di potenziali costruiti *ad hoc* come *Skyrme* e *Gogny*.

In questo lavoro tratteremo diverse forme per il potenziale Yukawiano. Partiremo dalla Yukawa più semplice, con un solo parametro libero. Successivamente aggiungeremo all'interno della formula un ulteriore parametro legato ad un operatore di scambio. In letteratura l'aggiunta di un termine di scambio ha permesso, per esempio, di riprodurre la simmetria riscontrata fenomenologicamente negli esperimenti di scattering di tipo *np* ad alte energie [18]. Nel nostro lavoro, come vedremo in seguito, questa scelta ci permetterà di riprodurre più facilmente il punto di saturazione per la materia nucleare. Infine utilizzeremo potenziali strutturati come somme di due o tre Yukawa (con e senza il parametro di scambio). Questo ci permetterà sia di introdurre una maggiore flessibilità all'interno del nostro modello, sia di riprodurre (tramite la scelta dei range, fissati caso per caso) l'andamento tipico dell'interazione nucleare in regioni spaziali differenti, come accade per esempio nel caso del potenziale *M3Y* (*Michigan 3 Yukawa*) [8].

Il nostro obiettivo sarà quello di capire quanti e quali parametri dobbiamo considerare per riprodurre i dati empirici per le proprietà fisiche della materia nucleare simmetrica e neutronica da noi studiate. Inoltre, in un pa-

ragrafo a parte, studieremo il comportamento della massa efficace in materia nucleare. Possiamo comunque anticipare fin da subito che il nostro modello avrà difficoltà nel trattare questo dato. Infatti, come già riscontrato in [9] e [10], per poter riprodurre questa proprietà sembrerebbe necessaria l'aggiunta di termini dipendenti dalla densità che in questo lavoro non abbiamo considerato.

Capitolo 1

Teoria di campo medio

La teoria di campo medio si può spesso considerare come la via più efficace per chiarire la relazione che intercorre tra la descrizione microscopica e le proprietà macroscopiche di un sistema a molti corpi, sia esso fermionico (come nel caso di sistemi di protoni e neutroni da noi trattati) o bosonico. Questo metodo permette di semplificare il problema a molti corpi, raramente risolvibile in maniera esatta, trasformandolo di fatto in un problema a singolo corpo, molto più semplice da trattare. Perchè questo sia possibile occorre utilizzare un'approssimazione, attuata tramite la sostituzione di tutte le interazioni tra singole particelle con un unico campo medio, calcolato come media delle interazioni.

Questa teoria si interpone fra le due classi di modelli spesso utilizzate in ambito nucleare, vale a dire quella dei modelli *ab initio*, che si sviluppano a livello microscopico partendo dallo studio dell'interazione tra nucleoni nel vuoto per giungere alla descrizione delle proprietà fisiche del sistema, e quella dei modelli macroscopici, come il noto modello a goccia, nel quale si utilizzano alcune proprietà globali (come l'energia di volume, l'energia di superficie, ...) per parametrizzare le proprietà fisiche del sistema, fittando successivamente i parametri con i dati sperimentali. Vi sono comunque alcuni limiti che non permettono di promuovere in maniera definitiva queste teorie. Nel primo caso, per esempio, si riesce a riprodurre bene i dati di scattering tra nucleoni ma il modello fallisce nel predire quantitativamente il punto di saturazione, a meno di non tener conto di altri fattori come la forza a tre corpi, aumentando la difficoltà del problema. Inoltre si riscontrano dei limiti computazionali per lo studio di nuclei pesanti, ovvero aumentando la dimensione del problema. Nel caso del modello a goccia, al contrario, si riescono a predire molto bene le caratteristiche della materia nucleare, ma il

problema principale consiste nel fatto che questa teoria poggia su basi meramente fenomenologiche. Nella trattazione del problema si è quindi cercata una via alternativa, ed il modello di campo medio si presentò come la strada più valida.

La teoria di campo medio, infatti, parte dallo studio microscopico dell'interazione fra nucleoni per fornire una descrizione del campo medio effettivo, ma conseguentemente introduce alcuni parametri scelti ed aggiustati in modo da fittare i dati sperimentali come nel caso del modello a goccia. Concretamente si utilizza un'approssimazione chiamata di *particella indipendente*, nella quale la funzione d'onda totale di un sistema formato da molti fermioni viene scritta come prodotto di funzioni d'onda di singola particella. Nel nostro lavoro questa approssimazione è stata introdotta utilizzando un metodo molto comune per lo studio dei sistemi a molti corpi, vale a dire *Hartree-Fock*, applicato con un'interazione di tipo Yukawa. Il metodo consiste nel trattare un problema ad A particelle interagenti con un potenziale a due corpi come N problemi di singola particella singola che interagiscono con un potenziale medio. Grazie a questi calcoli riusciremo quindi ad ottenere le formule parametriche per l'equazione di stato ed altre proprietà del sistema, che potremo successivamente confrontare con i valori sperimentali.

1.1 Sistema a molti corpi

Un sistema a molti corpi non relativistici che interagiscono con un potenziale a due corpi può essere rappresentato dalla seguente hamiltoniana

$$\begin{aligned} H &= T + V \\ &= \sum_{i=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(\vec{r}_i, \vec{r}_j), \end{aligned} \quad (1.1)$$

in cui il termine cinetico agisce solo sulla singola particella, mentre l'interazione tra le particelle i e j è rappresentata dal potenziale, scritto come operatore a due corpi. Nel nostro caso, per la materia nucleare e neutronica, dovremo considerare un sistema fermionico nel quale la funzione d'onda totale può essere scritta come prodotto antisimmetrico di funzioni d'onda di

singola particella, ovvero come un determinante di Slater

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(\vec{r}_1) & \phi_2(\vec{r}_1) & \dots & \phi_N(\vec{r}_1) \\ \phi_1(\vec{r}_2) & \phi_2(\vec{r}_2) & \dots & \phi_N(\vec{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\vec{r}_N) & \phi_2(\vec{r}_N) & \dots & \phi_N(\vec{r}_N) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_p (-1)^p \phi_{p1}(\vec{r}_1) \dots \phi_{pN}(\vec{r}_N),\end{aligned}\quad (1.2)$$

nel quale p indica la permutazione tra singole particelle. Possiamo scegliere le ϕ_i in modo tale che formino un sistema ortonormale completo, soddisfacendo quindi la condizione

$$\int d^3\vec{r} \phi_i^*(\vec{r}) \phi_j(\vec{r}) = \delta_{ij}.\quad (1.3)$$

Cerchiamo quindi di risolvere l'equazione di Schrödinger

$$H\Psi_n = E_n\Psi_n\quad (1.4)$$

in maniera approssimata. Sostituiamo lo stato esatto Ψ con uno stato approssimato del tipo Φ costruito, come visto in precedenza, partendo dalle funzioni d'onda di singola particella ϕ . La soluzione può essere calcolata utilizzando il metodo di Hartree-Fock.

1.2 Metodo di Hartree-Fock

Il metodo di Hartree-Fock è utile per determinare in buona approssimazione il *ground state* di alcuni sistemi a molti corpi, come per esempio i nuclei atomici. In questa procedura la funzione d'onda totale del sistema viene approssimata con una funzione d'onda scritta come determinante di Slater, in cui le autofunzioni di singola particella vengono scelte in modo tale da minimizzare l'energia del sistema.

Con un'Hamiltoniana del tipo (1.1) possiamo calcolare come agisce sul sistema, giungendo così ad una forma per l'energia. Partiamo quindi dal termine

cinetico, per il quale si avrà

$$\begin{aligned}
\langle \Phi | T | \Phi \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i^A \langle \Phi | \nabla_i^2 | \Phi \rangle \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i^A \frac{1}{A!} \sum_{pp'} (-1)^{p+p'} \langle \phi_{p(1)} \dots \phi_{p(A)} | \nabla_i^2 | \phi_{p'(1)} \dots \phi_{p'(A)} \rangle \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i^A \frac{1}{A!} \sum_{pp'} (-1)^{p+p'} \delta_{pp'} \langle \phi_i | \nabla_i^2 | \phi_i \rangle \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i^A \langle \phi_i | \nabla_i^2 | \phi_i \rangle.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Per l'operatore potenziale il calcolo da seguire sarà

$$\begin{aligned}
\langle \Phi | V | \Phi \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \langle \Phi | v(\vec{r}_i, \vec{r}_j) | \Phi \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \frac{1}{A!} \sum_{pp'} (-1)^{p+p'} \langle \phi_{p(1)} \dots \phi_{p(A)} | v(\vec{r}_i, \vec{r}_j) | \phi_{p'(1)} \dots \phi_{p'(A)} \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \frac{1}{A!} \sum_{pp'} (-1)^{p+p'} \delta_{pp'} \langle \phi_i \phi_j | v(\vec{r}_i, \vec{r}_j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \langle \phi_i \phi_j | v(\vec{r}_i, \vec{r}_j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Si noti che in questo caso la permutazione sul ket può variare per uno scambio di particelle. Il nostro obiettivo è quello di minimizzare l'energia precedentemente calcolata

$$\begin{aligned}
E &= \langle \Phi | H | \Phi \rangle \\
&= \langle \Phi | T + V | \Phi \rangle
\end{aligned} \tag{1.7}$$

e per far questo occorre risolvere l'equazione

$$\delta E = 0. \tag{1.8}$$

Avendo scelto un set di stati di singola particella ortonormali, possiamo risolvere l'equazione precedente con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. L'espressione diventerà quindi

$$\delta \left(E - \lambda \int d^3r \phi_i^*(\vec{r}) \phi_i(\vec{r}) \right), \quad (1.9)$$

ed eseguendo la variazione, utilizzando ϕ_i^* come quantità da variare, arriviamo alla seguente equazione

$$h_i \phi_i(\vec{r}) = \epsilon_i \phi_i(\vec{r}), \quad i = 1, \dots, A, \quad (1.10)$$

dove h_i rappresenta l'Hamiltoniana relativa alla particella i

$$h_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + u_{HF}[\phi_j] \quad (1.11)$$

e $u_{HF}[\phi_j]$ il potenziale di Hartree Fock

$$u_{HF}[\phi_j] = \sum_j^A \int d^3\vec{r}' \phi_i^*(\vec{r}) \phi_j^*(\vec{r}') v(\vec{r}, \vec{r}') [\phi_i(\vec{r}) \phi_j(\vec{r}') - \phi_j(\vec{r}) \phi_i(\vec{r}')]. \quad (1.12)$$

Si noti che a differenza dell'equazione di Schrödinger ordinaria il potenziale, in questo caso, dipende esplicitamente dalle funzioni d'onda. La prima parte dell'integrale viene chiamata *termine di Hartree* o *termine diretto*, e rappresenta l'interazione della particella considerata con la distribuzione delle altre particelle, che nel punto $\vec{r}$ ha densità $\rho = \phi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})$. La seconda parte viene definita *termine di Fock* o *termine di scambio*, e rappresenta la parte non classica dell'interazione dovuta alla natura fermionica delle particelle. L'equazione può essere risolta iterativamente partendo da un set iniziale di funzioni d'onda, inserendole poi nella formula, e continuando la procedura fino al raggiungimento della convergenza (autoconsistenza). Con questo procedimento si giunge ad una funzione valida come approssimazione della funzione d'onda totale del sistema, con la quale si può calcolare l'energia

$$E_{HF} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i^A \langle \phi_i | \nabla_i^2 | \phi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \langle \phi_i \phi_j | v(\vec{r}_i, \vec{r}_j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle. \quad (1.13)$$

Questa formula, divisa per il numero di particelle A , rappresenta l'equazione di stato per il sistema e verrà da noi utilizzata come punto di partenza per il calcolo delle altre proprietà presentate in seguito.

1.3 Materia nucleare simmetrica e materia neutronica

In questa tesi abbiamo scelto di trattare sistemi infiniti di materia nucleare e di materia neutronica poichè, pur essendo semplici sistemi ideali, spesso riescono a dare una descrizione qualitativa ed a volte quantitativa di alcune osservabili dei sistemi finiti. Per materia nucleare simmetrica si intende un sistema composto da protoni e neutroni presi in egual numero, nel quale non sono presenti asimmetrie o effetti di bordo e per il quale l'interazione Coulombiana tra protoni viene trascurata per rendere stabile il sistema. Si ha quindi

$$N = Z = \frac{A}{2}. \quad (1.14)$$

Le densità di protoni e neutroni al punto di equilibrio ρ_0 , ovvero per il valore di densità che minimizza l'energia del sistema, può essere considerata uguale in entrambi i casi

$$\rho_n = \rho_p = \frac{\rho_0}{2}. \quad (1.15)$$

Un sistema di questo tipo viene utilizzato in prima approssimazione per descrivere la materia interna ad un nucleo atomico o per trattare esperimenti di collisioni tra ioni pesanti [12].

Passiamo ora alla materia neutronica. Questa è assimilabile ad un sistema infinito formato da soli neutroni, per il quale si ha

$$N = A, \quad (1.16)$$

$$\rho_n = \rho_0. \quad (1.17)$$

Questo tipo di sistema divenne rilevante soprattutto con la scoperta di corpi celesti chiamati *stelle di neutroni*, sistemi composti prevalentemente da neutroni (con la presenza di un numero esiguo di protoni ed elettroni) che in prima approssimazione possono essere trattati come materia neutronica e studiati di conseguenza. Per una descrizione più dettagliata vedere [13].

Vediamo ora come studiare questi sistemi nel dettaglio. Per prima cosa possiamo pensare di racchiudere il sistema, sia esso nucleare o neutronico, in un volume Ω fissando le condizioni al contorno prendendole periodiche, trascurando così gli effetti di bordo in modo da trattare la materia come fosse infinita. Inoltre l'invarianza traslazionale fa sì che il momento sia conservato e che le funzioni d'onda possano essere scritte come onde piane della forma

$$\phi(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{\Omega}} \quad (1.18)$$

1.3. MATERIA NUCLEARE SIMMETRICA E MATERIA NEUTRONICA 7

Come visto nella sezione precedente siamo interessati a calcolare somme su stati caratterizzati da $\vec{k}$, e per fare questo è necessario conoscere il numero di stati per unità di volume nello spazio delle fasi. Iniziamo quindi a calcolare i valori ammessi per $\vec{k}$, considerando il volume Ω come un cubo di lato L

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}. \quad (1.19)$$

Si ricava quindi che il numero di stati per unità di volume è $V_k = \Omega/(2\pi)^3$. Le somme sugli stati caratterizzati da k potranno quindi diventare degli integrali, nel limite di materia infinita

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \quad (1.20)$$

in cui d rappresenta la degenerazione, che nel caso di materia nucleare simmetrica sarà $d = 4$, mentre nel caso di materia neutronica sarà $d = 2$. Per un sistema di fermioni vale il principio di esclusione di Pauli, vale a dire che la funzione d'onda dello stato fondamentale sarà caratterizzata da A nucleoni con numeri quantici differenti e con i più piccoli valori di momento ammessi nel suo stato fondamentale a $T = 0$; formeranno quindi, nello spazio dei momenti, una sfera (chiamata *sfera di Fermi*) di raggio k_f (chiamato *momento di Fermi*). Partendo da queste basi si può legare il momento di Fermi con la densità di particelle, sapendo che

$$\begin{aligned} A &= \Omega\rho \\ &= d \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_k} d^3\vec{k} \\ &= d \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_f^3, \end{aligned} \quad (1.21)$$

dove Ω_k rappresenta la *sfera di Fermi*. Otteniamo così una formula che lega la densità al momento di Fermi

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{d}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_f^3 \\ &= \frac{d}{6\pi^2} k_f^3. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Nel caso di materia simmetrica la formula precedente diventerà, tenendo conto della degenerazione

$$\rho = \frac{2}{3\pi^2} k_f^3, \quad (1.23)$$

mentre nel caso di materia neutronica avremo

$$\rho_n = \frac{k_{f_n}^3}{3\pi^2}. \quad (1.24)$$

La densità di particelle caratterizza particolarmente lo studio di un sistema a molti corpi. In particolare si può notare come alcune proprietà fisiche, utili per esempio nella teoria di campo medio per fittare i dati sperimentali, dipendano direttamente da questo valore. Vediamo infine come i risultati ottenuti in questa sezione possono tornarci utili per semplificare i calcoli di Hartree-Fock. Per prima cosa notiamo che le funzioni d'onda, a differenza del problema che tratta i nuclei finiti (nel quale vengono ricavate numericamente fino al raggiungimento dell'autoconsistenza), nel nostro caso sono note a priori e questo permetterà di calcolarle in maniera analitica. In più questi due tipi di sistema hanno il vantaggio di essere omogenei, ovvero non c'è alcuna direzione privilegiata di spin e, nel caso di materia simmetrica, di isospin. Quindi se scegliamo uno stato quantico $|k\sigma_z\rangle$ per descrivere il sistema, dove k rappresenta il momento e σ_z il valore di spin della particella riferito all'asse z , per ogni nucleone con spin-up ve ne sarà uno con spin-down. In materia simmetrica la stessa cosa accade anche per l'isospin τ . Questo significa che nei calcoli di Hartree Fock i termini $\langle\sigma_i \cdot \sigma_j\rangle$ e $\langle\tau_i \cdot \tau_j\rangle$, ovvero la media del prodotto degli operatori di spin e isospin, svaniscono facendo la media su tutti gli autostati.

1.4 Proprietà fisiche dei sistemi nucleari e neutronici

In questa sezione vogliamo presentare alcune proprietà della materia nucleare e neutronica attorno al punto di saturazione. Essendo infatti strettamente correlate a quantità sperimentalmente misurabili, ci torneranno utili quando dovremo fittare le nostre formule con i dati sperimentali. Le proprietà da noi considerate sono

1. *Densità di saturazione*: la densità della materia nucleare all'interno di un nucleo, escludendo la regione al bordo, può essere considerata costante nella maggior parte dei nuclei atomici, vale a dire quelli con $A > 40$. Il fatto che la densità non cresca all'aumentare di A implica che ogni particella interagisce solo con le particelle più vicine, una caratteristica tipica della forza nucleare. Questo comportamento è la chiave del meccanismo di saturazione.

1.4. PROPRIETÀ FISICHE DEI SISTEMI NUCLEARI E NEUTRONICI 9

Empiricamente, per nuclei del tipo sopracitato, si è visto che il raggio atomico varia come $r_0 A^{1/3}$, con $r_0 \sim 1.1 - 1.2 fm$. Si può calcolare quindi la densità come

$$\rho_0 = \frac{A}{V} = \frac{3}{4\pi r_0^3}. \quad (1.25)$$

Si trova quindi, per la densità di saturazione, il valore [14]

$$\rho_0 = 0.16 fm^{-3}. \quad (1.26)$$

2. *Energia di saturazione*: la formula di Bethe-Weizsäcker rappresenta una buona approssimazione delle energie di legame sperimentali. Discende direttamente dal modello a goccia, e può essere rappresentata come

$$\frac{E}{A} = a_v - a_s A^{-1/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{4/3}} - a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A^2} + \delta(A, Z) + \dots, \quad (1.27)$$

in cui a_v , a_s , a_C , a_{sym} sono rispettivamente i coefficienti del contributo di volume, superficie, Coulomb e simmetria, mentre $\delta(A, Z)$ rappresenta il termine di pairing. Nel caso particolare di materia nucleare simmetrica l'unico termine che ci interessa sarà il contributo volumico a_v , che nel punto di saturazione vale [15]

$$\varepsilon(\rho_0) = -16 \pm 0.1 MeV, \quad (1.28)$$

avendo definito ε (l'equazione di stato) come l'energia per particella, ovvero $\varepsilon = \frac{E}{A}$.

3. *Pressione*: per un sistema di particelle si definisce la pressione come

$$P = - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_A, \quad (1.29)$$

dove E rappresenta l'energia del sistema, V il volume ed A il numero di particelle, che rimane costante. Introducendo la densità volumica $\rho = \frac{A}{V}$ come variabile del sistema otteniamo

$$P = \rho^2 \frac{d\varepsilon}{d\rho}. \quad (1.30)$$

Alla densità di saturazione l'energia deve presentare un minimo e la pressione, essendo direttamente legata alla derivata dell'energia, dovrà annullarsi per questo punto

$$P = \rho^2 \left. \frac{d\varepsilon}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (1.31)$$

Si noti che per questa proprietà non abbiamo un errore sperimentale. Possiamo comunque prendere quello scelto per ρ_0 e propagare l'errore su P utilizzando le formule per la pressione. Ricaviamo così un valore di $\sigma_P = 0.1$.

4. *Incompressibilità*: la compressibilità viene definita come

$$\chi(\rho) = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)^{-1}, \quad (1.32)$$

ed ha le dimensioni dell'inverso di una pressione. Introducendo la densità volumica otteniamo l'espressione per l'incompressibilità

$$\chi^{-1}(\rho) = 2\rho^2 \frac{d\varepsilon}{d\rho} + \rho^3 \frac{d^2\varepsilon}{d\rho^2}. \quad (1.33)$$

Possiamo ora scrivere l'espressione dell'energia per particella sviluppando in serie di McLaurin intorno al punto di minimo

$$\varepsilon(\rho) = \varepsilon(\rho_0) + \frac{1}{2} K_\infty \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right)^2 + \dots, \quad (1.34)$$

in cui definiamo

$$K_\infty(\rho_0) = 9\rho_0^2 \left. \frac{d^2\varepsilon}{d\rho^2} \right|_{\rho=\rho_0}. \quad (1.35)$$

K_∞ viene definito *coefficiente di incompressibilità*, ed ha le dimensioni di un'energia. Rappresenta quindi, a meno di costanti, la derivata seconda dell'energia nel punto di saturazione. Sperimentalmente si trova che l'incompressibilità in questo punto vale [15]

$$K_\infty(\rho_0) = 240 \pm 20 MeV. \quad (1.36)$$

5. *Energia di simmetria*: riprendendo la formula (1.27) possiamo notare come il contributo dell'energia di simmetria dipenda sostanzialmente dalla differenza fra il numero di protoni e neutroni presenti nel sistema. Nel caso di materia simmetrica questo termine si annullerà, mentre per materia neutronica corrisponderà al coefficiente a_{sym} . Si noti che un'asimmetria del sistema può essere trattata come perturbazione rispetto alla parte simmetrica. Scriviamo quindi in termini di densità di particelle questa asimmetria, introducendo un parametro che definiamo come

$$\alpha = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho}. \quad (1.37)$$

Essendo una perturbazione possiamo sviluppare l'energia di legame intorno ad α

$$\frac{E}{A}(\rho, \alpha) = \frac{E}{A}(\rho, \alpha = 0) + S(\rho) \left(\frac{\rho_n - \rho_p}{\rho} \right)^2 + \dots, \quad (1.38)$$

dove $S(\rho)$ viene definita come *energia di simmetria*. In materia neutronica, per la quale vale $\alpha = 1$, possiamo ricavare $S(\rho)$ invertendo la formula precedente

$$S(\rho) = \frac{E}{A}(\rho, \alpha = 1) - \frac{E}{A}(\rho, \alpha = 0), \quad (1.39)$$

in cui $\frac{E}{A}(\rho, \alpha = 1)$ rappresenta l'energia di legame di un sistema neutronico, mentre $\frac{E}{A}(\rho, \alpha = 0)$ l'energia di un sistema nucleare. Infine scriviamo il valore empirico di S al punto di saturazione [15]

$$S(\rho_0) = 32 \pm 2 \text{ MeV}. \quad (1.40)$$

6. *Derivata dell'energia di simmetria*: l'energia di simmetria $S(\rho)$ può essere sviluppata intorno al punto $\rho = \rho_0$ nel modo seguente

$$S(\rho) = S(\rho_0) + \frac{L}{3} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \dots. \quad (1.41)$$

Nella formula compare $L(\rho)$, definito semplicemente come

$$L(\rho) = 3\rho \frac{dS}{d\rho}. \quad (1.42)$$

Il valore sperimentale di L nel punto di saturazione risulta essere [15]

$$L(\rho_0) = 60 \pm 30 \text{ MeV} \quad (1.43)$$

7. *Massa efficace*: rappresenta la massa che avrebbe un nucleone se, invece di muoversi all'interno di un campo medio, venisse considerato come particella libera di massa m^* . Concretamente si calcola eguagliando la trasformata di Fourier dell'equazione di Schrödinger del nucleone all'interno del campo medio con la trasformata dell'equazione di particella libera

$$\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + U(k) = \frac{\hbar^2}{2m^*} k^2. \quad (1.44)$$

Derivando l'equazione precedente rispetto al momento k otteniamo la formula valida per la massa efficace, in funzione della variabile k

$$\frac{m}{m^*}(k) = 1 + \frac{m}{\hbar^2 k} \frac{\partial U(k)}{\partial k} \quad (1.45)$$

La forma per il potenziale di singola particella $U(k)$ si calcola come

$$U(k) = \sum_{\sigma'\tau'} \int d^3\vec{k}' \langle k\sigma\tau k'\sigma'\tau' | V(1 - P_{12}) | k\sigma\tau k'\sigma'\tau' \rangle, \quad (1.46)$$

in cui σ e τ rappresentano rispettivamente il numero quantico di spin ed isospin, k è il momento della particella e P_{12} rappresenta l'operatore di scambio per i numeri quantici. In letteratura è solito calcolare questo valore per $k = k_f$, ovvero sulla superficie della sfera di fermi. In questa regione il valore empirico di $\frac{m^*}{m}$ può variare in un intervallo compreso tra 0.6-0.8 [16].

1.5 Potenziali Yukawiani

In questo paragrafo vogliamo brevemente presentare l'interazione di tipo Yukawa e le forme per il potenziale utilizzate per il nostro lavoro.

Un'interazione tra due particelle, a livello microscopico, avviene fisicamente tramite lo scambio di un mediatore, vale a dire una particella esterna che trasporta energia e numeri quantici associati all'interazione. Per esempio, nel caso dell'interazione elettromagnetica, la particella scambiata è il fotone, un bosone di tipo vettoriale che media l'interazione tra particelle cariche. Se si vuole cercare l'equivalente nel caso della forza nucleare la questione è più complicata. Infatti le caratteristiche tipiche della forza nucleare, come il fatto di non essere centrale o di avere dipendenza diretta da spin e da termini di scambio, introducono alcune difficoltà. Poiché una descrizione elementare della forza forte esula dal nostro lavoro, possiamo considerare l'approssimazione (utilizzata anche per la teoria di campo medio) per cui i nucleoni vengono trattati come particelle puntiformi. L'interazione tra nucleoni viene descritta in termini di accoppiamento con un campo scalare ϕ , associato ai mesoni. Il potenziale che accoppia mesoni e nucleoni è preso proporzionale al campo ϕ

$$V = g\phi, \quad (1.47)$$

dove g indica la costante di accoppiamento. L'ampiezza di probabilità per i vari processi ottenibili da un tale accoppiamento può essere rappresentata

con opportuni diagrammi di Feynman e calcolata tramite l'utilizzo della teoria perturbativa. Per maggiori dettagli guardare [17]. Eseguendo i calcoli si ottiene una forma di potenziale dipendente da $\vec{k}$

$$V(\vec{k}) = \frac{g^2}{4\pi^3\omega_{\vec{k}}}, \quad (1.48)$$

con $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + \mu^2}$. Attuando la trasformata di Fourier si arriva infine alla forma finale per il potenziale di interazione nello spazio delle coordinate

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{g^2}{4\pi^3} \int d^3\vec{k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{|\vec{k}|^2 + \mu^2} \\ &= \frac{g^2}{2\pi} \frac{e^{-\mu|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

ideata per la prima volta da Hideke Yukawa, da cui prende il nome.

Presentiamo quindi le forme di potenziale da noi utilizzate. Partendo da un potenziale del tipo (1.49) abbiamo inizialmente considerato un solo parametro libero fissando $a = \frac{g^2}{2\pi}$ e prendendo il range μ come parametro fisso

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = a \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (1.50)$$

Successivamente, prendendo spunto dai vari modelli presenti in letteratura (per esempio si veda [20] e [18]), abbiamo aggiunto alla formula precedente un ulteriore parametro libero b legato ad un termine di scambio

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = (a + bP_M) \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (1.51)$$

dove P_M indica l'operatore di scambio di Majorana.

Infine abbiamo considerato altre quattro forme per il potenziale, prese rispettivamente come somma di due o tre potenziali del tipo (1.50) e (1.51). Si noti che questa scelta ci permette di fissare rispettivamente due o tre range differenti all'interno di un singolo potenziale, così da poter riprodurre l'andamento tipico dell'interazione tra nucleoni in regioni spaziali differenti. Infatti possiamo dividere la rappresentazione dell'interazione principalmente in tre parti, rappresentabili come:

- una parte altamente repulsiva a corto-range, che riproduce lo scambio tra mesoni pesanti.

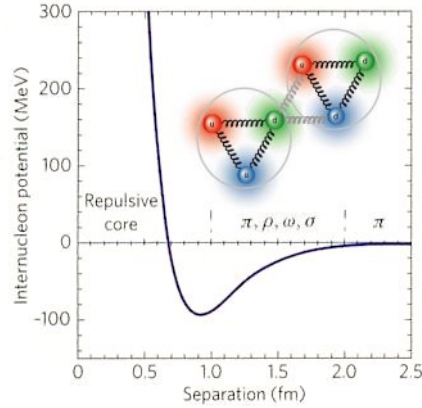


Figura 1.1: esempio di andamento dell' interazione tra nucleoni in funzione del range.

- una parte centrale attrattiva che riproduce lo scambio tra mesoni di tipo ρ , σ , π o doppio π .
- una parte debolmente attrattiva a lungo-range, che riproduce la coda tipica dell' OPEP (*one-pion-exchange-potential*)

In figura 1.1mostriamo una rappresentazione schematica del potenziale d' interazione in funzione di r . Precisiamo che il range presente nel grafico rappresenta la distanza d' interazione (in fm), mentre i range μ presenti nelle nostre formule indicano l' inverso della distanza (fm^{-1}). Quest' ultimi sono rappresentativi per la massa del mesone scambiato durante l' interazione. Nel caso di doppia Yukawa abbiamo scelto di fissare i range in modo tale da poter riprodurre l' andamento della regione intermedia e della coda, trascurando quindi dal calcolo la zona più repulsiva. Infatti per sistemi infiniti, studiati al punto di saturazione $\rho = \rho_0$, andando a calcolare la distanza media tra nucleoni all' interno del sistema troviamo un valore di circa $2fm$; stiamo quindi esplorando una regione spaziale ben lontana dal core repulsivo, che in un primo momento possiamo trascurare. Uno studio comprensivo anche di questa regione è stato svolto successivamente nel caso di potenziali con tre Yukawa, nel quale fissiamo il terzo valore del range in modo tale da riprodurre il core repulsivo. Scriviamo quindi le forme utilizzate nei capitoli successivi per questi potenziali:

- nel caso di somme di (1.50) abbiamo

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{e^{-\mu_k |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad n = 2, 3. \quad (1.52)$$

- nel caso di somme di (1.51) abbiamo

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k P_M) \frac{e^{-\mu_k |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad n = 2, 3. \quad (1.53)$$

Capitolo 2

Calcoli di Hartree-Fock

2.1 Termine cinetico

Per prima cosa vediamo come risolvere il termine cinetico a livello di Hartree-Fock. Come visto in precedenza, per l'energia cinetica abbiamo

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i^A \langle \phi_i | \nabla_i^2 | \phi_i \rangle. \quad (2.1)$$

Per arrivare alla soluzione utilizziamo le approssimazioni valide per la materia infinita, ovvero

$$\phi(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{\Omega}}, \quad (2.2)$$

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k}. \quad (2.3)$$

Il termine cinetico, di conseguenza, può essere scritto come

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i^A \langle \phi_i | \nabla_i^2 | \phi_i \rangle \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_k} d^3\vec{k} \int_{\Omega} d^3\vec{r} \frac{e^{-i\vec{r} \cdot \vec{k}}}{\sqrt{\Omega}} \nabla_i^2 \frac{e^{i\vec{r} \cdot \vec{k}}}{\sqrt{\Omega}} \\ &= \frac{\Omega d}{10\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} k_f^5. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Poichè siamo interessati a calcolare l'energia di stato di singola particella, dovremo dividere per il numero di particelle presenti nel sistema, ovvero per

$$\begin{aligned}
A &= \Omega \rho \\
&= \frac{\Omega d}{6\pi^2} k_f^3,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

ricordando che per il secondo passaggio vale (1.22). Scriviamo quindi la formula dell'energia per particella

$$\begin{aligned}
\langle t \rangle &= \frac{\langle T \rangle}{A} = \left(\frac{\Omega d}{10\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} k_f^5 \right) \left(\frac{(2\pi)^3}{\Omega d} \frac{3}{4\pi k_f^3} \right) \\
&= \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Questo risultato sarà valido per ogni tipo di sistema ed interazione utilizzati.

2.2 Una Yukawa con due parametri liberi in materia nucleare

Iniziamo a studiare come l'operatore potenziale può essere manipolato a livello di Hartree-Fock. Prendiamo inizialmente la forma di potenziale del tipo (1.51), vale a dire quella con il parametro legato al termine di scambio, e consideriamo un sistema nucleare simmetrico. La scelta dell'utilizzo di questo potenziale è legata al fatto che partendo da questa forma si possono facilmente ricavare tutte le altre da noi studiate, per esempio portando a zero il parametro b nel caso di (1.50) o sommando più potenziali come nel caso di (1.53). I calcoli che seguiranno saranno quindi validi anche per gli altri casi, nel quale cambieranno solo alcuni fattori. Ricordiamo inizialmente la forma del potenziale (1.50)

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = (a + bP_M) \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \tag{2.7}$$

e vediamo come si calcola

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \langle \phi_i \phi_j | V(r_i, r_j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle. \tag{2.8}$$

Per prima cosa operiamo sul potenziale per anti-simmetrizzarlo

$$V_{AS}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)(1 - P_{12}), \tag{2.9}$$

dove $P_{12} = P_M P_\sigma P_\tau$. P_M indica l'operatore di scambio di Majorana, valido per le posizioni, mentre P_σ e P_τ corrispondono agli operatori di scambio rispettivamente per spin e isospin. Scriviamo ora gli operatori di scambio sui numeri quantici avvalendoci delle matrici di Pauli, prese nei rispettivi spazi di spin e isospin, ottenendo così

$$P_\sigma = \frac{1 + \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j}{2} \quad (2.10)$$

$$P_\tau = \frac{1 + \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j}{2}. \quad (2.11)$$

Il potenziale si può quindi scrivere come

$$V_{AS}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \left[\left(a - b \frac{1 + \sigma_i \cdot \sigma_j + \tau_i \cdot \tau_j + (\sigma_i \cdot \sigma_j)(\tau_i \cdot \tau_j)}{4} \right) + \right. \\ \left. \left(b - a \frac{1 + \sigma_i \cdot \sigma_j + \tau_i \cdot \tau_j + (\sigma_i \cdot \sigma_j)(\tau_i \cdot \tau_j)}{4} \right) P_M \right]. \quad (2.12)$$

Infine, sfruttando il fatto che $\langle \sigma_i \cdot \sigma_j \rangle = \langle \tau_i \cdot \tau_j \rangle = 0$ nel caso di materia simmetrica non polarizzata, si può semplificare ulteriormente la formula precedente ottenendo

$$V_{AS}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \left[\left(a - \frac{b}{4} \right) + \left(b - \frac{a}{4} \right) P_M \right] \quad (2.13)$$

Notiamo che il potenziale si divide in due parti: la prima equivale al termine diretto o di Hartree, mentre la seconda, quella in cui compare l'operatore di Majorana, rappresenta la parte di scambio o di Fock. Per rendere più semplice il calcolo trattiamo i due termini separatamente.

2.2.1 Termine diretto

Vediamo quindi come possiamo trattare il contributo che il termine diretto da all'energia.

$$\begin{aligned} \langle V_d \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \langle \phi_i \phi_j | \left(a - \frac{b}{4} \right) \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} | \phi_i \phi_j \rangle \\ &= \frac{4a - b}{8} \left(\frac{4\Omega}{(2\pi)^3} \right)^2 \int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} d^3 \vec{k}_i d^3 \vec{k}_j \\ &\quad \int_{\Omega} \int_{\Omega} d^3 \vec{r}_i d^3 \vec{r}_j \frac{e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_i}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{-i\vec{k}_j \cdot \vec{r}_j}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \frac{e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_i}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}_j}}{\sqrt{\Omega}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Concentrimoci prima di tutto sull'integrale spaziale. Operiamo un cambio di variabili, passando alle coordinate per il centro di massa e per le posizioni relative

$$\begin{cases} \vec{R} = \frac{\vec{r}_i + \vec{r}_j}{2} \\ \vec{r} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \\ |det(\mathbf{J})| = 1, \end{cases} \quad (2.15)$$

dove $\mathbf{J}$ indica la matrice Jacobiana del cambiamento di variabili. Si noti che grazie all'invarianza traslazionale del sistema, la regione di integrazione Ω rimane invariata. Inoltre possiamo prendere questa regione grande a piacere. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \langle V_d \rangle &= \frac{4a-b}{32\pi^6} \int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} d^3\vec{k}_i d^3\vec{k}_j \int_{\Omega} d^3\vec{R} \int_{\Omega} d^3\vec{r} \frac{e^{-\mu|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} \\ &= \frac{(4a-b)\Omega}{8\pi^5\mu^2} \int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} d^3\vec{k}_i d^3\vec{k}_j. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Per calcolare l'integrale sui momenti ricordiamo che la regione d'integrazione Ω_k corrisponde alla sfera di Fermi, la quale rappresenta nello spazio dei momenti una sfera di raggio finito k_f . Non avendo dipendenze da k nella parte spaziale, l'integrale corrisponderà semplicemente al volume della sfera $\Gamma_k = \int_{\Omega_k} d^3\vec{k}_i d^3\vec{k}_j = \frac{4\pi k_f^3}{3}$. Otteniamo così

$$\langle V_d \rangle = (4a-b) \frac{2\Omega k_f^6}{9\pi^3\mu^2} \quad (2.17)$$

Infine, poichè siamo interessati a calcolare l'energia per particella, come nel caso dell'energia cinetica dividiamo per il numero di particelle A , ottenendo così

$$\langle v_d \rangle = \frac{(4a-b)k_f^3}{3\pi\mu^2} \quad (2.18)$$

Notiamo che in questo caso la dipendenza dalla densità è lineare. Questo comporterà, come vedremo successivamente, che questo termine domini ad alte densità.

2.2.2 Termine di scambio

Vediamo ora come trattare il contributo di Fock all'energia. Come già visto nel capitolo precedente, questo sarà dato da

$$\begin{aligned}\langle V_s \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \langle \phi_i \phi_j | \left(b - \frac{a}{4} \right) \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} | \phi_j \phi_i \rangle \\ &= \frac{4b - a}{32\pi^6} \int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} d^3\vec{k}_i d^3\vec{k}_j \int_{\Omega} \int_{\Omega} d^3\vec{r}_i d^3\vec{r}_j e^{-i(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_j)} \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Possiamo notare che, a differenza del termine diretto, l'integrale sulle posizioni ha una dipendenza dai momenti che renderà il calcolo più difficoltoso. Prima di tutto operiamo un cambio di variabili sulle posizioni, come già fatto nella sezione precedente, e sviluppiamo l'integrale sulle posizioni

$$\begin{aligned}\langle V_s \rangle &= \frac{(4b - a)}{32\pi^6} \int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} d^3\vec{k}_i d^3\vec{k}_j \int_{\Omega} d^3\vec{R} \int_{\Omega} d^3\vec{r} e^{-i\vec{r} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_j)} \frac{e^{-\mu|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} \\ &= \frac{(4b - a)\Omega}{8\pi^5} \int_{\Omega_k} d^3\vec{k}_i \int_{\Omega_k} d^3\vec{k}_j \frac{1}{|\vec{k}_i - \vec{k}_j|^2 + \mu^2}.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Successivamente scegliamo un sistema di riferimento adeguato per i momenti, prendendo come variabili le coniugate di $\vec{r}$ e $\vec{R}$

$$\begin{cases} \vec{k} = \vec{k}_i + \vec{k}_j \\ \vec{q} = \frac{\vec{k}_i - \vec{k}_j}{2} \\ |\det(\mathbf{J})| = 1. \end{cases}\quad (2.21)$$

Notiamo che, in questo caso, la regione di integrazione Ω_k varia se cambiamo sistema di riferimento. Per giungere al risultato finale abbiamo seguito il procedimento presente in [19], nel quale viene trattato un gas degenerato di elettroni a livello di Hartree-Fock. Il sistema non coincide esattamente con il nostro, ma essendo interessati solo al procedimento possiamo comunque considerare validi i calcoli svolti. Operiamo quindi un nuovo cambiamento di variabili per i momenti, così da utilizzare le stesse presenti nel testo

$$\begin{cases} \vec{k}' = \frac{\vec{k}_i + \vec{k}_j}{2} = \frac{\vec{k}}{2} \\ \vec{q}' = \vec{k}_i - \vec{k}_j = 2\vec{q} \\ |\det(\mathbf{J})| = 1. \end{cases}\quad (2.22)$$

La nuova regione di integrazione Λ si trova ricordando che $|\vec{k}_i| < k_f, |\vec{k}_j| < k_f$, con cui si ottiene

$$\Lambda = f(\Omega_k) = \{|\vec{k}_i(\vec{k}', \vec{q}')|, |\vec{k}_j(\vec{k}', \vec{q}')| < k_f\} = \{|\vec{k}' + \frac{\vec{q}'}{2}|, |\vec{k}' - \frac{\vec{q}'}{2}| < k_f\}. \quad (2.23)$$

Si manifesta quindi come intersezione di due sfere, ognuna delle quali ha raggio k_f . Il loro centro dista $|\vec{q}'|$. Grazie alla simmetria rotazionale e traslazionale del sistema, possiamo studiare il problema geometrico equivalente, vale a dire

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = k_f^2 \\ (x - d)^2 + y^2 + z^2 = k_f^2, \end{cases} \quad (2.24)$$

in cui $d = |\vec{q}'|$. Il calcolo del volume di questa regione ci porta al risultato

$$\begin{aligned} |\Lambda| &= \int d^3\vec{k}' \Theta\left(k_f - |\vec{k}' + \frac{\vec{q}'}{2}|\right) \Theta\left(k_f - |\vec{k}' - \frac{\vec{q}'}{2}|\right) \\ &= \frac{4\pi k_f^3}{3} \left(1 - \frac{3|\vec{q}'|}{4k_f} + \frac{|\vec{q}'|^3}{16k_f^3}\right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tornando quindi al calcolo dell'integrale di scambio (2.20), procediamo utilizzando per semplicità una variabile adimensionale

$$x = \frac{|\vec{q}'|}{2k_f} \quad (2.26)$$

e tenendo conto dei calcoli precedenti. Otteniamo così

$$\langle V_s \rangle = \frac{4\Omega(4b - a)k_f^4}{3\pi^3} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + \left(\frac{\mu}{2k_f}\right)^2} \left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{x^3}{2}\right). \quad (2.27)$$

Possiamo dividere l'integrale in 3 parti, calcolando separatamente i pezzi

$$\int dx \frac{x^2}{a^2 + x^2} = x - atg^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (2.28)$$

$$\frac{3}{2} \int dx \frac{x^3}{a^2 + x^2} = \frac{3}{4} \left(x^2 - a^2 \ln(a^2 + x^2)\right) \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{2} \int dx \frac{x^5}{a^2 + x^2} = \frac{1}{8} \left(2a^4 \ln(a^2 + x^2) - 2a^2 x^2 + x^4\right). \quad (2.30)$$

Scriviamo infine il risultato già diviso per il numero di particelle A

$$\langle v_s \rangle = \frac{3(4b - a)k_f}{4\pi} I(k_f), \quad (2.31)$$

in cui $I(k_f)$ rappresenta la funzione

$$I(k_f) = \left[1 - \frac{\mu^2}{6k_f^2} + \frac{\mu^2}{2k_f^2} \ln \left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2} \right) + \frac{\mu^4}{24k_f^4} \ln \left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2} \right) - \frac{4\mu}{3k_f} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2k_f}{\mu} \right) \right]. \quad (2.32)$$

2.2.3 Equazione di stato e derivate

Sommando i tre termini calcolati nelle sezioni precedenti, otteniamo finalmente l'equazione di stato di singola particella

$$\varepsilon(k_f) = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m} + \frac{(4a - b)k_f^3}{3\pi\mu^2} + \frac{3(4b - a)k_f}{4\pi} I(k_f). \quad (2.33)$$

Equivalentemente si può scrivere l'espressione precedente in termini della densità, ricordando la formula (1.23) che lega la densità al momento di fermi

$$\varepsilon(\rho) = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{\pi^{\frac{4}{3}} \hbar^2 \rho^{\frac{2}{3}}}{5m} + \frac{(4a - b)\pi\rho}{2\mu^2} + \left(\frac{81}{128\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b - a) \rho^{\frac{1}{3}} I(k_f). \quad (2.34)$$

Come ci aspettiamo da una quantità intensiva, la formula non dipende dal volume.

Vediamo quindi come si comporta l'equazione a diverse densità. A bassi valori l'energia cinetica predomina. A densità più alte il termine diretto ed il termine di scambio non sono più trascurabili, ed il bilanciamento tra i due rende possibile il raggiungimento del punto di saturazione. Il primo termine caratterizza la parte repulsiva dell'interazione, ed il fattore $(4a - b)$ dev'essere quindi positivo. Il secondo, al contrario, caratterizza la parte attrattiva e di conseguenza il termine $(4b - a)$ sarà negativo. Se andiamo a vedere il rapporto tra questi due termini

$$\frac{\langle v_d \rangle}{\langle v_s \rangle} \sim \frac{4a - b}{4b - a} \frac{k_f^2}{\mu^2} \quad (2.35)$$

notiamo che il valore varia a seconda dei parametri scelti. Questo permetterà al sistema, come vedremo nel prossimo capitolo, di raggiungere il punto di

saturatione. Infine, ad alte densità, domina il termine diretto e l'energia diverge. Per dare più credito alle nostre equazioni possiamo confrontare i risultati con [20]. In questo caso viene calcolata l'equazione di stato per un sistema di materia nucleare simmetrica con un'interazione del tipo

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} (W + MP_x), \quad (2.36)$$

leggermente differente dalla nostra. L'aggiunta del range μ al denominatore, comunque, è trascurabile poichè nelle formule finali cambieranno solamente i valori per i parametri ma non i risultati numerici.

Scriviamo ora le formule per la pressione e l'incompressibilità, che abbiamo visto essere direttamente collegate alla derivata prima e seconda dell'equazione di stato. Per la pressione si ottiene

$$\begin{aligned} P(\rho) &= \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \\ &= \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{5m} \rho^{\frac{5}{3}} + \frac{(4a-b)\pi}{2\mu^2} \rho^2 + \left(\frac{3}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} (4b-a) \rho^{\frac{4}{3}} I(k_f) + \\ &\quad \left(\frac{81}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} (4b-a) \rho^{\frac{7}{3}} W(k_f), \end{aligned} \quad (2.37)$$

mentre per l'incompressibilità

$$\begin{aligned} K(\rho) &= 9\rho^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} \\ &= \left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{3^{\frac{5}{3}} \hbar^2}{5m} \rho^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{144\pi}\right)^{\frac{1}{3}} (4b-a) \rho^{\frac{1}{3}} I(k_f) + \\ &\quad \left(\frac{3}{16\pi}\right)^{\frac{1}{3}} (4b-a) \rho^{\frac{4}{3}} W(k_f) + \left(\frac{81}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} (4b-a) \rho^{\frac{7}{3}} Z(k_f). \end{aligned} \quad (2.38)$$

$I(k_f)$ è definito come in (2.32), mentre gli altri due termini rappresentano la derivata prima e seconda (in ρ) di $I(k_f)$. Il primo si può scrivere come

$$\begin{aligned} W(k_f) &= \pi^2 \left[\frac{2 \left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2}\right)^{-1}}{3k_f^3} + \frac{\mu^2}{6k_f^5} + \frac{\mu^2 \left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2}\right)^{-1}}{6k_f^5} + \frac{2\mu}{3k_f^4} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2k_f}{\mu}\right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\mu^2}{2k_f^5} \ln\left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2}\right) - \frac{\mu^4}{12k_f^7} \ln\left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.39)$$

e rappresenta la derivata prima. Il secondo viene definito come

$$Z(k_f) = \pi^4 \left[\frac{2 \left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2}\right)^{-2}}{3k_f^6} - \frac{5\mu^2}{12k_f^8} - \frac{8 \left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2}\right)^{-2}}{3\mu^2 k_f^4} - \frac{7 \left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2}\right)^{-1}}{3k_f^6} - \frac{3\mu^2 \left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2}\right)^{-1}}{4k_f^8} - \frac{4\mu}{3k_f^7} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2k_f}{\mu}\right) - \frac{5\mu^2}{4k_f^8} \ln\left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2}\right) - \frac{7\mu^4}{2k_f^{10}} \ln\left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2}\right) \right] \quad (2.40)$$

e rappresenta la derivata seconda. Notare che, per facilitare la lettura, si è scelto di scrivere i termini $I(k_f)$, $W(k_f)$ e $Z(k_f)$ utilizzando come variabile k_f anche nel caso in cui l'equazione di stato è stata scritta in termini di ρ . Per giungere ad una forma completa in cui compaiono solo termini in densità basta ricordare la formula (1.23) che lega il momento di Fermi alla densità di particelle.

2.3 Yukawa con n parametri

Siamo ora interessati a scrivere le equazioni anche per le altre forme di potenziale. Avendo trovato una soluzione valida per la forma (1.51), non dovremo più ripetere tutti i calcoli svolti precedentemente. In questo paragrafo daremo solamente le formule per le equazioni di stato, partendo da (2.33) ed aggiustando i fattori caso per caso. Le espressioni per le altre proprietà verranno presentate volta per volta nel capitolo successivo, quando calcoleremo i parametri. Semplicemente terremo valide le stesse formule trovate nel caso di potenziale con una Yukawa e due parametri liberi, stando attenti però ad inserire i fattori corretti come nel caso dell'equazione di stato.

2.3.1 EoS per una Yukawa con un parametro

Per un potenziale con una Yukawa ed un solo parametro libero possiamo giungere alla formula dell'energia per particella portando semplicemente a zero il parametro b presente in (2.33), mantenendo inalterato il resto. Otteniamo quindi

$$\varepsilon(k_f) = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m} + \frac{4ak_f^3}{3\pi\mu^2} - \frac{3ak_f}{4\pi} I(k_f). \quad (2.41)$$

Vediamo ora come si comportano il termine diretto ed il termine di scambio, responsabili del raggiungimento del punto di saturazione. A basse densità, come nel caso di Yukawa con due parametri, domina il termine cinetico. Il termine diretto e di scambio entrano in gioco a densità più alte. Anche in questo caso possiamo vedere come si comporta il rapporto tra i due termini, notando un'indipendenza dal parametro a

$$\frac{\langle v_d \rangle}{\langle v_s \rangle} \sim -\frac{k_f^2}{\mu^2}. \quad (2.42)$$

Il bilanciamento tra i due, fissati il range μ e la densità, rimane quindi costante per ogni valore del parametro scelto. Come si vedrà nel prossimo capitolo questo fatto renderà impossibile il raggiungimento del punto di saturazione. Per ottenere infine la formula valida per il potenziale e l'incompressibilità dovremo semplicemente prendere (2.37) e (2.38) rispettivamente, ricordando che abbiamo considerato $b = 0$.

2.3.2 EoS per somme di più Yukawa

Vediamo ora come ottenere le formule valide per l'equazione di stato quando si utilizzano interazioni del tipo (1.52) e (1.53), vale a dire un'interazione presa come somma di due o tre Yukawa del tipo (1.50) e (1.51) rispettivamente. Si arriva al risultato prendendo semplicemente la somma di equazioni di stato del tipo (2.33) e (2.41). Nel caso di somme di Yukawa del tipo (1.50) la formula il risultato sarà

$$\varepsilon(k_f) = \sum_{i=1}^n \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m} + \frac{4a_i k_f^3}{3\pi\mu_i^2} - \frac{3a_i k_f}{4\pi} I(k_f), \quad n = 2, 3, \quad (2.43)$$

Nel caso di somme del tipo (1.51) avremo per l'equazione di stato

$$\varepsilon(k_f) = \sum_{i=1}^n \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m} + \frac{(4a_i - b_i)k_f^3}{3\pi\mu_i^2} - \frac{3(4b_i - a_i)k_f}{4\pi} I(k_f), \quad n = 2, 3. \quad (2.44)$$

Per calcolare le altre proprietà fisiche del sistema, in particolare la pressione e l'incompressibilità, basterà prendere le formule trovate nel caso di singola Yukawa con 1 o 2 parametri e sommarle due o tre volte. Nel terzo capitolo scriveremo caso per caso le equazioni utili per i calcoli.

2.4 Equazioni di stato per materia neutronica

Calcoliamo infine le equazioni di stato in caso di materia neutronica. Per trovare la forma di interazione corretta bisogna tener conto del fatto che, per

un sistema neutronico, ogni particella ha lo stesso valore della terza componente di isospin. Si avrà quindi, per l'operatore di scambio sugli isospin, la condizione $P_\tau = 1$. Seguendo il percorso svolto nelle sezioni precedenti, prendiamo come esempio iniziale il potenziale con una sola Yukawa e due parametri liberi. Per iniziare antisimmetrizziamo il potenziale nel modo corretto

$$V_{AS}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)(1 - P_{12}). \quad (2.45)$$

In questo caso l'operatore di scambio vale $P_{12} = P_M P_\sigma$. Senza svolgere nuovamente tutti i passaggi, scriviamo direttamente la forma del potenziale antisimmetrico

$$V_{AS}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \left[\left(a - \frac{b}{2} \right) + \left(b - \frac{a}{2} \right) P_M \right]. \quad (2.46)$$

Per calcolare l'equazione di stato possiamo considerare validi i calcoli fatti per la materia nucleare, apportando solamente qualche modifica sui fattori. Infatti, come già visto in precedenza, cambierà il fattore legato al termine di scambio di Majorana ed i termini legati alla degenerazione. Cambia inoltre il valore per il momento di Fermi, che nel caso di materia neutronica sarà k_{f_n} . Otteniamo quindi

$$\varepsilon_n(k_{f_n}) = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{f_n}^2}{2m} + \frac{(2a - b)k_{f_n}^3}{3\pi\mu^2} + \frac{3(2b - a)k_{f_n}}{4\pi} I(k_{f_n}). \quad (2.47)$$

Come nel caso di materia nucleare possiamo calcolare altre quantità partendo dall'equazione di stato, che possono essere legate ad alcune proprietà fisiche della materia neutronica sperimentalmente misurate. In particolare consideriamo per questo tipo di sistema l'energia di simmetria S la sua derivata L . La formula dell'energia di simmetria si trova semplicemente prendendo la differenza tra l'equazione di stato di materia neutronica (2.47) e l'equazione di stato di materia nucleare (2.33)

$$\begin{aligned} S(k_{f_n}, k_f) &= \varepsilon_{ntr} - \varepsilon_{ncl} \\ &= \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (k_{f_n}^2 - k_f^2) + \frac{(2a - b)k_{f_n}^3}{3\pi\mu^2} + \frac{3(2b - a)k_{f_n}}{4\pi} I(k_{f_n}) - \\ &\quad \frac{(4a - b)k_f^3}{3\pi\mu^2} - \frac{3(4b - a)k_f}{4\pi} I(k_f). \end{aligned} \quad (2.48)$$

La formula per L , che scriviamo direttamente in ρ per comodità, sarà data da

$$\begin{aligned}
 L(\rho) = & \frac{3^{\frac{5}{3}} \hbar^2 \pi^{\frac{4}{3}}}{5m} \rho^{\frac{2}{3}} (1 - 2^{-\frac{2}{3}}) - \frac{3b_k \pi}{2\mu_k^2} \rho + \left(\frac{81}{64\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} \\
 & \left[(2b_k - a_k) I(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}} (2b_k - a_k) I(k_f) \right] + \\
 & 3 \left(\frac{81}{64\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} \left[(2b_k - a_k) W(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}} (2b_k - a_k) W(k_f) \right],
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

in cui $I(k_f)$ e $W(k_f)$ sono definite rispettivamente come (2.32) e (2.39).

Capitolo 3

Scelta dei parametri e risultati

Nel capitolo precedente siamo arrivati a scrivere le formule d'interazione per le proprietà fisiche dei sistemi trattati, vale a dire la materia nucleare simmetrica e la materia neutronica, considerando diverse forme di potenziale. Giunti a questo risultato il passo successivo sarà quindi capire quali valori dovremo dare ai parametri che caratterizzano i potenziali al fine di riprodurre i dati sperimentali, e prima ancora se esistano dei valori tali da raggiungere questo risultato.

Per la determinazione dei parametri utilizzeremo due diversi procedimenti per risolvere caso per caso i sistemi di equazioni. Per sistemi ben determinati, come per esempio nel caso di una Yukawa con due parametri liberi e due equazioni, utilizzeremo un metodo numerico utile per risolvere sistemi non lineari, vale a dire il *metodo di Broyden* [21] (descritto in appendice A). I calcoli sono stati effettuati implementando il metodo in un programma di *C++*.

Per trattare sistemi non determinati, come per esempio nel caso di doppia Yukawa con quattro parametri liberi e cinque equazioni, utilizzeremo il metodo del fit. Inoltre, qualora il metodo di Broyden desse problemi computazionali, passeremo all'utilizzo dei fit anche per sistemi ben determinati. Essendo un argomento così vasto ed eterogeneo presenteremo i dettagli tecnici per i nostri calcoli in appendice B.

Anche per i calcoli del fit implementeremo il problema in un programma *C++*, ed utilizzeremo le librerie precompiate di *ROOT* per la minimizzazione del χ^2 .

Nei calcoli successivi specificheremo volta per volta le equazioni ed i dati utilizzati. Comunque l'idea che terremo sarà quella di aumentare gradualmente il numero di equazioni, partendo dall'energia per particella e dalla

Tabella 3.1: dati empirici ed errori nel punto di saturazione.

$\varepsilon(\rho_0)$ (MeV)	$P(\rho_0)$ ($\frac{MeV}{fm^3}$)	$K_\infty(\rho_0)$ (MeV)	$S(\rho_0)$ (MeV)	$L(\rho_0)$ (MeV)
-16 ± 0.1	0 ± 0.1	240 ± 20	32 ± 2	60 ± 30

pressione (che permettono di riprodurre il punto di saturazione), per poi aggiungere l' incompressibilità ed infine le proprietà per la materia neutronica, vale a dire l' energia di simmetria e la sua derivata. Si noti che abbiamo escluso dal calcolo dei parametri la massa efficace, che sarà trattata in un paragrafo a parte. Infatti questa proprietà, come vedremo in seguito, non viene riprodotta molto bene dal nostro modello e all' interno del fit modificava (peggiorando di molto) tutti i risultati. Per comodità ricordiamo una volta per tutte i valori empirici calcolati al punto di saturazione per le cinque proprietà considerate insieme agli errori ad esse associati in tabella 3.1, di cui dovremo tener conto per il calcolo dei fit.

3.1 Una Yukawa con un parametro libero

Iniziamo il nostro studio prendendo un potenziale della forma (1.50), con una singola Yukawa ed un solo parametro libero a

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = a \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (3.1)$$

Ricordiamo che il parametro μ presente nella formula rappresenta la massa del mesone scambiato nell'interazione, o equivalentemente l'inverso del range inteso come distanza d' interazione per la forza nucleare. Per esempio, nel caso in cui la particella scambiata fosse un pione (come ipotizzato da Yukawa), il valore per il nostro range sarebbe $\mu \sim 0.7 fm^{-1}$, equivalente a $\mu^{-1} \sim 1.43 fm$. Nel nostro lavoro abbiamo comunque ritenuto valido un set ampio di valori, in cui consideriamo per esempio anche lo scambio tra mesoni pesanti, rimanendo sempre entro un intervallo che abbia senso fisico. In particolare scegliamo come condizione

$$0.6 \leq \mu(fm^{-1}) \leq 2.5, \quad (3.2)$$

$$0.4 \leq \mu^{-1}(fm) \lesssim 1.7. \quad (3.3)$$

Questa restrizione sarà utilizzata in tutto il capitolo.

Procediamo quindi con il calcolo imponendo due condizioni al nostro sistema, ovvero fissando l'equazione di stato e la pressione ai valori sperimentali

ottenuti nel punto di saturazione per materia nucleare

$$\begin{aligned}\varepsilon(\rho_0) &\equiv -16 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{\pi^{\frac{4}{3}} \hbar^2 \rho_0^{\frac{2}{3}}}{5m} + \frac{2a\pi\rho_0}{\mu^2} - \left(\frac{81}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} a\rho_0^{\frac{1}{3}} I(k_{f_0}),\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}P(\rho_0) &\equiv 0 \\ &= \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{5m} \rho_0^{\frac{5}{3}} + \frac{2a\pi}{\mu^2} \rho_0^2 - \left(\frac{3}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} a\rho_0^{\frac{4}{3}} I(k_{f_0}) - \\ &\quad \left(\frac{81}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} a\rho_0^{\frac{7}{3}} W(k_{f_0}),\end{aligned}\quad (3.5)$$

dove $I(k_f)$ e $W(k_f)$ sono definiti rispettivamente come in (2.32) e (2.39). La variabile ρ è stata introdotta ricordando la formula (1.23), che lega il momento di Fermi alla densità di particelle.

Provando ad implementare il problema con queste condizioni non abbiamo ottenuto una soluzione valida utilizzando il metodo di Broyden, ovvero il programma restituiva valori negativi o troppo alti per il range. Abbiamo quindi cercato di capire se il problema provenisse dal metodo o dal sistema stesso. Ricordando però le considerazioni fatte nel corso del secondo capitolo a proposito dell'equazione di stato (2.41), notiamo che il bilanciamento tra il termine repulsivo ed attrattivo, chiave del meccanismo di saturazione, rimane costante per ogni valore del parametro a . Per avere una dimostrazione diretta del fatto che per questo caso è il sistema stesso e non il metodo a dare problemi abbiamo confrontato l'andamento della derivata prima e seconda in funzione del parametro a , fissando volta per volta la densità a ρ_0 ed il parametro μ a diversi valori, comunque entro i limiti dell'intervallo. Per ogni valore di μ scelto abbiamo notato che la derivata seconda risultava essere sempre negativa nel punto in cui la derivata prima si annullava, ovvero ρ_0 non poteva essere un punto di minimo per l'energia. Come esempio mostriamo in figura 3.1 l'andamento delle derivate avendo fissato $\mu = 1.4 fm^{-1}$. In figura 3.2 mostriamo l'andamento dell'equazione di stato in funzione di ρ , nella quale abbiamo fissato $\mu = 1.4 fm^{-1}$ ed abbiamo calcolato a in modo tale da riprodurre la singola condizione $P(\rho_0) \equiv 0$. Come si può notare la funzione non presenta minimi e diverge a meno infinito (si dice che la materia collassa).

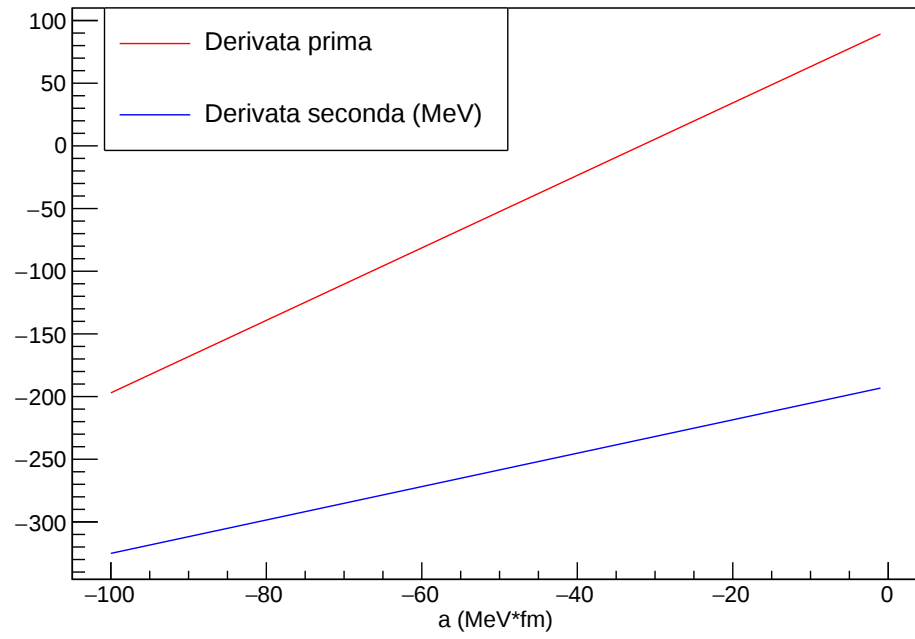


Figura 3.1: grafico per la derivata prima (linea rossa) e per la derivata seconda (linea blu) dell'equazione di stato in funzione di a , con il range fissato a $\mu = 1.4 fm^{-1}$.

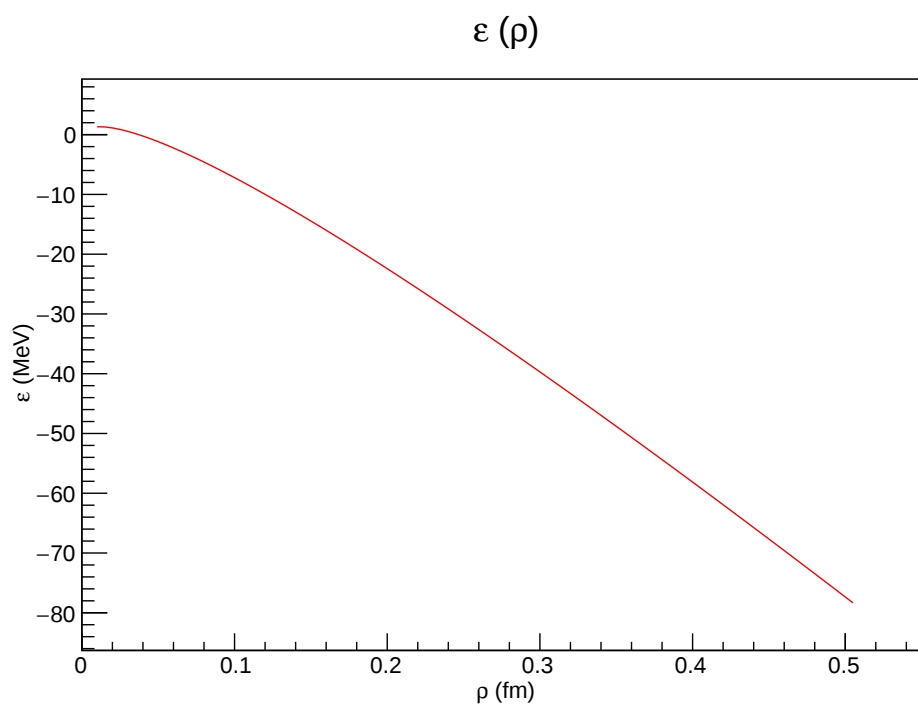


Figura 3.2: equazione di stato per materia nucleare in funzione della densità per una Yukawa con un parametro libero.

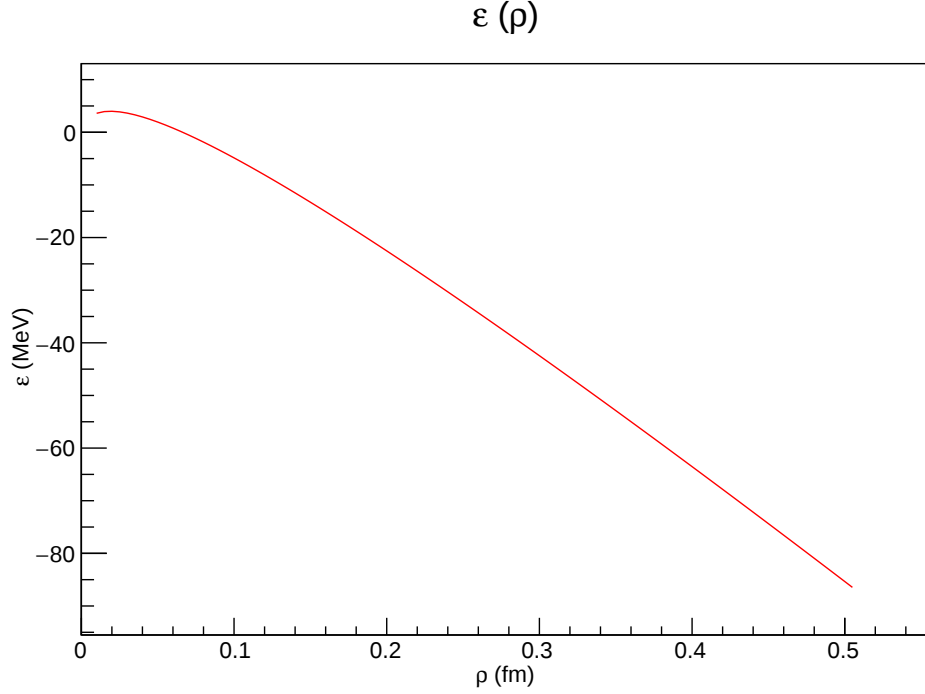


Figura 3.3: equazione di stato per materia nucleare in funzione della densità per la somma di due Yukawa con due parametri liberi.

3.2 Somma di due Yukawa con due parametri liberi

Vediamo ora come si modificano i risultati precedenti se prendiamo due parametri liberi a_k e due range d'interazione μ_k , presenti in un potenziale strutturato come somma di due Yukawa del tipo (1.50)

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \sum_{k=1,2} a_k \frac{e^{-\mu_k |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (3.6)$$

In particolare abbiamo scelto di fissare i due μ_k a

$$\mu_1 = 0.6 \text{ fm}^{-1}, \quad \mu_2 = 1.5 \text{ fm}^{-1}, \quad (3.7)$$

Per calcolare i due parametri liberi utilizzeremo il metodo del fit inserendo inizialmente due equazioni e due dati, vale a dire l'energia per particella e la pressione con i rispettivi valori sperimentali, al fine di riprodurre il punto

di saturazione per materia nucleare. Scriviamo quindi le formule di $\varepsilon(\rho)$ e $P(\rho)$ corrette per un potenziale di questo tipo

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{k=1,2} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{\pi^{\frac{4}{3}} \hbar^2 \rho^{\frac{2}{3}}}{5m} + \frac{2a_k \pi \rho}{\mu_k^2} - \left(\frac{81}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{1}{3}} I(k_f), \quad (3.8)$$

$$P(\rho) = \sum_{k=1,2} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{5m} \rho^{\frac{5}{3}} + \frac{2a_k \pi}{\mu_k^2} \rho^2 - \left(\frac{3}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{4}{3}} I(k_f) - \left(\frac{81}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{7}{3}} W(k_f). \quad (3.9)$$

Vediamo quindi, come nel caso precedente, come si comporta l'equazione di stato in funzione di ρ , mostrando in figura 3.3 il grafico ottenuto. Il sistema non riesce ancora a raggiungere il punto di saturazione come nel caso di singola Yukawa, e la materia collassa.

3.3 Somma di tre Yukawa con tre parametri liberi

Per completare questo ciclo di studio con potenziali formati da somme di Yukawa del tipo (1.51) consideriamo infine il caso con tre Yukawa, ovvero un potenziale del tipo

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \sum_{k=1}^3 a_k \frac{e^{-\mu_k |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (3.10)$$

in cui compaiono tre parametri liberi a_k e tre diversi range μ_k . In particolare i tre range d'interazione sono stati fissati prendendo i primi due come in (3.7), mentre il terzo è stato scelto in modo tale da riprodurre la parte repulsiva dell'interazione, quella a corto-range, trascurata nel caso di due Yukawa. Avremo quindi

$$\mu_1 = 0.6 fm^{-1}, \quad \mu_2 = 1.5 fm^{-1}, \quad \mu_3 = 2.5 fm^{-1}. \quad (3.11)$$

Così facendo siamo in grado di coprire tutte e tre le regioni spaziali associate alle parti più importanti dell'interazione fra nucleoni. Calcoliamo quindi i tre parametri fittando inizialmente i valori empirici dell'equazione di stato e della pressione. Scriviamo quindi le due formule utilizzate nel fit:

Tabella 3.2: valori dei parametri (in $MeV \cdot fm$) per la somma di tre Yukawa, calcolati fittando l'equazione di stato e la pressione.

a_1	a_2	a_3
-1119.57	4970.12	7462.80

- per l'equazione di stato avremo

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{\pi^{\frac{4}{3}} \hbar^2 \rho^{\frac{2}{3}}}{5m} + \frac{2a_k \pi \rho}{\mu_k^2} - \left(\frac{81}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{1}{3}} I(k_f), \quad (3.12)$$

- per la pressione sarà valida la formula

$$P(\rho) = \sum k = 1^3 \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{5m} \rho^{\frac{5}{3}} + \frac{2a_k \pi}{\mu_k^2} \rho^2 - \left(\frac{3}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{4}{3}} I(k_f) - \left(\frac{81}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{7}{3}} W(k_f), \quad (3.13)$$

in cui $I(k_f)$ e $W(k_f)$ sono definiti rispettivamente come in (2.32) e (2.39).

I valori ottenuti per i parametri sono presentati in tabella 3.2. Possiamo notare un fatto particolare, ovvero che i tre parametri non hanno tutti lo stesso segno. Ricordando che questi valori sono presenti all'interno dell'equazione di stato come fattori legati ai termini diretto ($+a_k$) e di scambio ($-a_k$), vediamo come rispetto al caso con singola Yukawa giocano indistintamente sia il ruolo repulsivo che quello attrattivo all'interno dell'interazione. Comunque, proprio grazie a questi valori, si riesce a bilanciare l'equazione e quindi a raggiungere il punto di saturazione.

Tornando al nostro studio mostriamo in figura 3.4 l'andamento dell'equazione di stato in funzione della densità con i parametri calcolati con il fit presentati in tabella 3.2. Siamo quindi riusciti a riprodurre il punto di saturazione per materia nucleare. Vediamo inoltre che il grafico presenta:

- un sistema non legato per basse densità, fino a $\rho \sim 0.04$.
- un punto di minimo, rappresentante il punto di saturazione per materia nucleare.
- una tendenza a mantenere legato il sistema fino a $\rho \sim 0.29$.

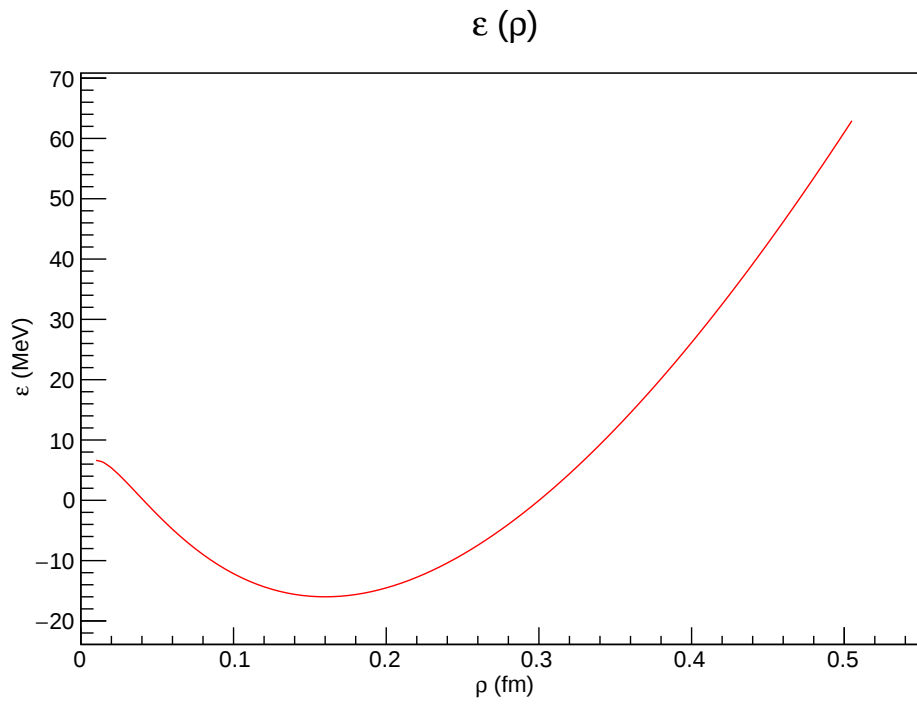


Figura 3.4: equazione di stato per materia nucleare per una Yukawa e tre parametri liberi, fittando l'energia per particella e la pressione.

Tabella 3.3: valori dei parametri e risultati per la somma di tre Yukawa, calcolati fittando l'equazione di stato, la pressione e l'incompressibilità.

a_1 (MeV · fm)	a_2 (MeV · fm)	a_3 (MeV · fm)	$\varepsilon(\rho_0)$ (MeV)	$P(\rho_0)$ ($\frac{MeV}{fm^3}$)	$K_\infty(\rho_0)$ (MeV)
-643.02	8730.08	-13309	-16.0003	0.00145	239.39

- una divergenza a più infinito per alte densità.

Possiamo quindi proseguire nello studio delle proprietà globali del sistema andando a vedere come si comporta l'incompressibilità K_∞ in materia nucleare. Ricordiamo prima di tutto la formula valida per il potenziale considerato

$$K_\infty(\rho) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{3^{\frac{5}{3}} \hbar^2}{5m} \rho^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{144\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{1}{3}} I(k_f) - \left(\frac{3}{16\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{4}{3}} W(k_f) - \left(\frac{81}{128\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{7}{3}} Z(k_f), \quad (3.14)$$

in cui $Z(k_f)$ è preso come in (2.40). Aggiungiamo quindi al calcolo del fit la formula parametrica per l'incompressibilità con il suo valore sperimentale nel punto di saturazione. I valori così ottenuti per i parametri sono presentati in tabella 3.3 insieme ai risultati. Riusciamo quindi a riprodurre bene i valori per tutte e tre le proprietà fisiche della materia nucleare. Mostriamo quindi in figura 3.5 il grafico per $\varepsilon(\rho)$, e vediamo come si modifica rispetto al caso in cui non abbiamo fittato K_∞ .

Come nel caso precedente i termini diretto e di scambio giocano entrambi sia il ruolo repulsivo che quello attrattivo a seconda della Yukawa considerata. Numericamente riusciamo comunque ad ottenere dei risultati soddisfacenti. Vediamo inoltre che la funzione si modifica tranne che per il punto di saturazione, che viene riprodotto in entrambi i casi. Inoltre la funzione sembra appiattirsi, indice del fatto che senza considerare K_∞ all'interno del fit questo valore viene scelto casualmente. Passiamo ora allo studio della materia neutronica. In particolare studiamo l'energia di simmetria $S(\rho_0)$ e la sua derivata $L(\rho_0)$ nel punto di saturazione per materia nucleare. Scriviamo prima di tutto la formula dell'equazione di stato valida per la materia neutronica, ricavata da (2.47) avendo posto $b = 0$. Abbiamo quindi effettuato un cambio di variabile $k_{f_n} \rightarrow \rho$ utilizzando la formula (1.24), valida per la materia neutronica. Otteniamo così

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{k=1}^3 \frac{3^{\frac{5}{3}} \hbar^2 \pi^{\frac{4}{3}}}{10m} \rho^{\frac{2}{3}} + \frac{2a_k \pi \rho}{\mu_k^2} - \left(\frac{81}{64\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{1}{3}} I(k_{f_n}). \quad (3.15)$$

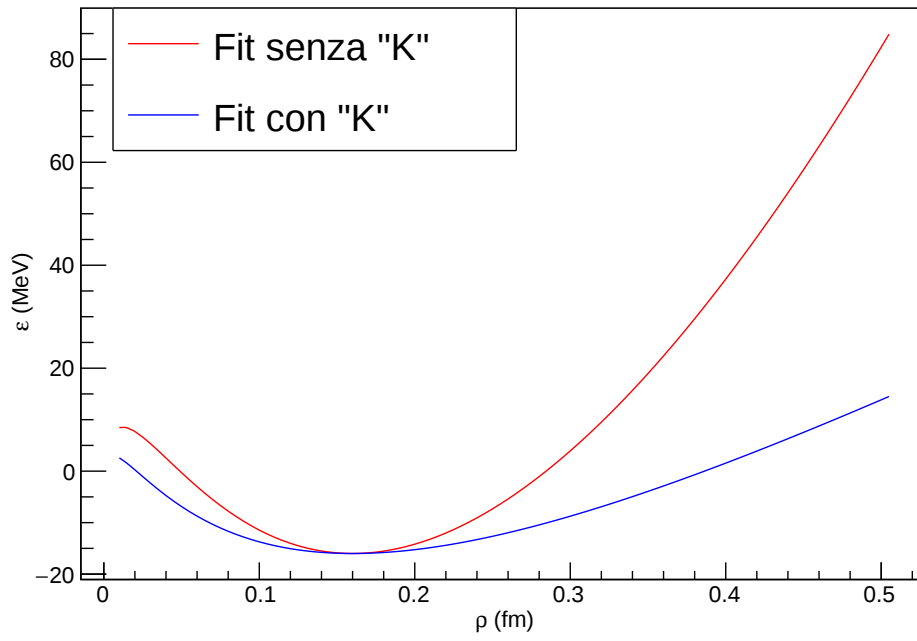


Figura 3.5: equazione di stato in materia nucleare per due e tre Yukawa.

Tabella 3.4: valori dei parametri (in $MeV \cdot fm$) per tre Yukawa trovati fittando ε , P , K_∞ , S , L .

a_1	a_2	a_3
-660.41	8465.67	-12176.2

Tabella 3.5: risultati per le proprietà fisiche del sistema.

$\varepsilon(\rho_0)$ (MeV)	$P(\rho_0)$ ($\frac{MeV}{fm^3}$)	$K_\infty(\rho_0)$ (MeV)	$S(\rho_0)$ (MeV)	$L(\rho_0)$ (MeV)
-15.9907	-0.05738	250.64	29.5844	158.39

Da questa formula possiamo quindi ricavare le formule per $S(\rho)$ ed $L(\rho)$, ricordando (2.48) e (2.49)

$$S(\rho) = \sum_{k=1}^3 \frac{3^{\frac{5}{3}} \hbar^2 \pi^{\frac{4}{3}}}{10m} \rho^{\frac{2}{3}} (1 - 2^{-\frac{2}{3}}) - \left(\frac{81}{64\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{1}{3}} \left(I(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}} I(k_f) \right). \quad (3.16)$$

$$L(\rho) = \sum_{k=1}^3 \frac{3^{\frac{5}{3}} \hbar^2 \pi^{\frac{4}{3}}}{5m} \rho^{\frac{2}{3}} (1 - 2^{-\frac{2}{3}}) - \left(\frac{81}{64\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{1}{3}} \left(I(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}} I(k_f) \right) - 3 \left(\frac{81}{64\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a_k \rho^{\frac{4}{3}} \left(W(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}} W(k_f) \right), \quad (3.17)$$

in cui $I(k_{f_n})$ e $W(k_{f_n})$ sono definite come in (2.32) e (2.39), mentre k_f e k_{f_n} sono rispettivamente i momenti di Fermi in materia nucleare e neutronica. Procediamo quindi inserendo all'interno del fit, oltre alle tre proprietà scelte per la materia nucleare, anche $S(\rho)$ ed $L(\rho)$ con i rispettivi dati empirici. Otteniamo così i valori per i parametri presentati in tabella 3.4 insieme ai risultati per le proprietà fisiche, presentati in tabella 3.5.

Vediamo quindi che, sebbene si riescano a riprodurre le proprietà per la materia nucleare, sorgono alcuni problemi se consideriamo per il fit anche le proprietà per la materia neutronica. In particolare notiamo che non riusciamo a riprodurre i valori per $S(\rho_0)$ ed $L(\rho_0)$ entro l'errore sperimentale, soprattutto nel caso di $L(\rho_0)$. Per avere un'idea più chiara dei risultati ottenuti possiamo andare a vedere come si comporta l'equazione di stato per materia neutronica, presentando il grafico in figura 3.6. Notiamo come fino a $\rho \sim 0.1$ il sistema risulta essere legato, ma sappiamo che fisicamente questo

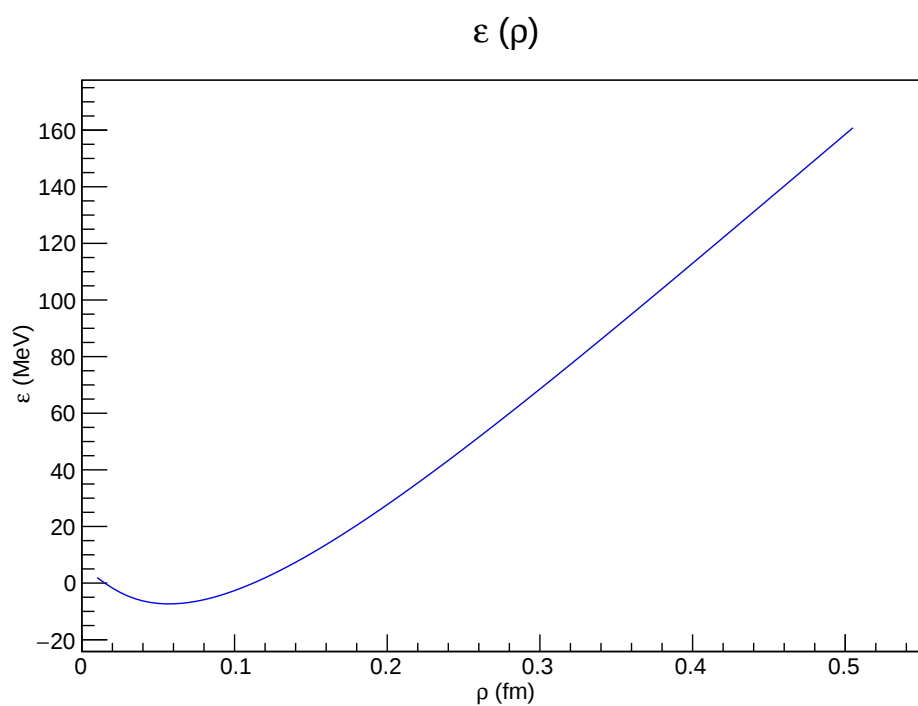


Figura 3.6: equazione di stato per materia neutronica.

non può mai verificarsi per un sistema composto da soli neutroni. Quindi, utilizzando un potenziale con tre Yukawa e tre parametri liberi, si riescono a riprodurre bene i valori sperimentali per la materia nucleare ma non accade lo stesso se andiamo a studiare la materia neutronica.

3.4 Una Yukawa con due parametri liberi

Apriamo un nuovo paragrafo considerando per i nostri calcoli potenziali della forma (1.51) e (1.53), nei quali per ogni Yukawa è stato aggiunto un parametro b_K legato all'operatore di scambio di Majorana P_M . In particolare iniziamo questo percorso prendendo un potenziale della forma

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = (a + bP_M) \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (3.18)$$

con una sola Yukawa e due parametri liberi a e b . Dividiamo lo studio del problema in due parti considerando nel primo caso solo la materia nucleare con le sue proprietà, mentre nel secondo includeremo nei calcoli anche le proprietà della materia neutronica. Si noti che non avendo fissato il range μ esploreremo le varie proprietà scegliendo volta per volta un valore differente preso all'interno dell'intervallo (3.2).

Definiamo inoltre l'*integrale di volume*

$$A = \int d^3\vec{r} V(|\vec{r}|), \quad (3.19)$$

che ci servirà in corso d'opera per spiegare l'andamento dei parametri al variare di μ . Nella formula precedente $V(|\vec{r}|)$ rappresenta una forma qualsiasi di potenziale, nel nostro caso uno Yukawa del tipo

$$V(|\vec{r}|) = v_0 \frac{e^{-\mu|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}. \quad (3.20)$$

Questo integrale caratterizza, per unità di volume, l'elemento di matrice diagonale dell'interazione

$$\langle kk' | V | kk' \rangle, \quad (3.21)$$

in cui k e k' rappresentano i valori per i momenti delle due particelle interagenti. In particolare sappiamo che il valore di A deve rimanere approssimativamente costante, e la scelta sul valore di μ influirà necessariamente anche sul parametro v_0 , che varierà di conseguenza. Nel nostro potenziale

v_0 è legato direttamente ai parametri a e b , e questo tipo di comportamento si rifletterà sull' andamento di questi valori.

3.4.1 Materia nucleare

Per trovare i valori per i due parametri liberi a e b fissiamo inizialmente due condizioni, ovvero cerchiamo di riprodurre il punto di saturazione imponendo all' equazione di stato ed alla pressione di riprodurre i valori sperimentali

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho_0) &\equiv -16 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{\pi^{\frac{4}{3}} \hbar^2 \rho_0^{\frac{2}{3}}}{5m} + \frac{(4a-b)\pi\rho_0}{2\mu^2} + \left(\frac{81}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} (4b-a)\rho_0^{\frac{1}{3}} I(k_f), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} P(\rho_0) &\equiv 0 \\ &= \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{5m} \rho_0^{\frac{5}{3}} + \frac{(4a-b)\pi}{2\mu^2} \rho_0^2 + \left(\frac{3}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} (4b-a)\rho_0^{\frac{4}{3}} I(k_{f_0}) + \\ &\quad \left(\frac{81}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} (4b-a)\rho_0^{\frac{7}{3}} W(k_{f_0}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Otteniamo così un sistema di due equazioni in due incognite, risolvibile con il metodo di Broyden presentato in appendice A. Scegliendo volta per volta un diverso valore per il range μ , comunque entro l'intervallo (3.2), troviamo i risultati presentati in tabella 3.6. Si noti che abbiamo scritto i parametri a e b sia presi singolarmente, sia così come appaiono nelle formule, per avere un'idea più immediata del ruolo che giocano all' interno dell' interazione. In tabella vengono inoltre mostrati i valori per l'incompressibilità a $\rho = \rho_0$, calcolata tramite la formula

$$\begin{aligned} K(\rho_0) &= \left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{3^{\frac{5}{3}} \hbar^2}{5m} \rho_0^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{144\pi}\right)^{\frac{1}{3}} (4b-a)\rho_0^{\frac{1}{3}} I(k_{f_0}) + \\ &\quad \left(\frac{3}{16\pi}\right)^{\frac{1}{3}} (4b-a)\rho_0^{\frac{4}{3}} W(k_{f_0}) + \left(\frac{81}{128\pi}\right)^{\frac{1}{3}} (4b-a)\rho_0^{\frac{7}{3}} Z(k_{f_0}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

in cui $Z(k_f)$ è definito come in (2.40). Possiamo notare come la scelta del range μ pesi molto sui risultati dei parametri e valori. Per esempio vediamo come variano i termini legati alla parte diretta e di scambio col variare di μ . Il fattore $(4a-b)$, che caratterizza il termine diretto, si presenta sempre come valore positivo mentre $(4b-a)$, legato al termine di scambio, ha sempre valori

Tabella 3.6: valori per i parametri ($MeV \cdot fm$) e per K_∞ al variare di μ .

μ (fm^{-1})	a	b	$4a - b$	$4b - a$	K_∞ (MeV)
0.6	-17.957	-92.243	20.415	-351.016	99.42
0.8	-18.366	-128.072	54.606	-493.922	119.51
1	-14.302	-174.739	117.53	-684.653	137.86
1.2	-3.407	-234.815	221.189	-935.855	154.52
1.4	17.123	-311.291	379.785	-1262.29	169.55
1.6	50.558	-407.596	609.828	-1680.94	183.05
1.8	100.647	-527.617	930.204	-2211.11	195.1
2	171.632	-675.709	1362.24	-2874.47	205.83
2.2	268.251	-856.709	1929.71	-3695.09	215.37
2.4	395.744	-1075.94	2658.91	-4699.49	223.84

negativi. Ricordiamo infatti che la parte diretta gioca un ruolo repulsivo all' interno dell' interazione, mentre quella di scambio un ruolo attrattivo. Inoltre si noti il progressivo aumento (in valore assoluto) di questi fattori al crescere di μ , o equivalentemente al diminuire della distanza d' interazione μ^{-1} . Infatti ricordiamo che l' integrale di volume, presentato nella parte introduttiva del paragrafo, deve rimanere approssimativamente costante per ogni scelta di μ .

Mostriamo ora come varia l'andamento dell'equazione di stato per diversi valori del range, in figura 3.7. Possiamo commentare il risultato ottenuto come segue:

- a basse densità il sistema risulta essere legato.
- è presente il punto di saturazione per tutti i valori di μ scelti.
- il punto in cui il sistema risulta non essere più legato varia a seconda del range scelto, e si nota un progressivo restringimento della funzione all' aumentare del range.
- ad alte densità l' energia diverge.

In particolare il restringimento della funzione rispecchia l'andamento del valore di incompressibilità, legata direttamente alla derivata seconda dell'equazione di stato. Possiamo pensare che più il range d' interazione è breve, più il sistema resiste a compressioni fisiche. Andiamo quindi a vedere nel

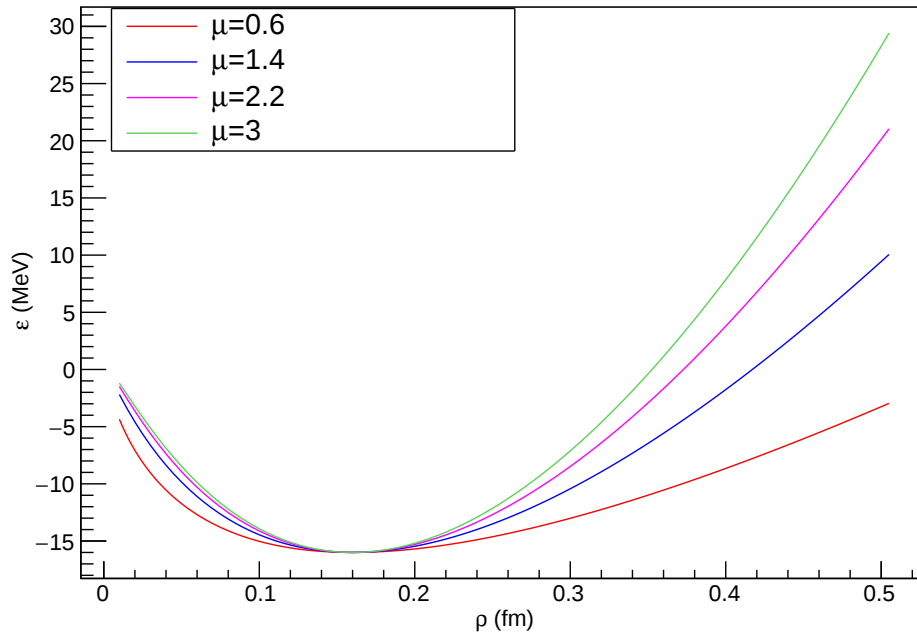


Figura 3.7: equazione di stato per una Yukawa e due parametri liberi per diversi valori di μ .

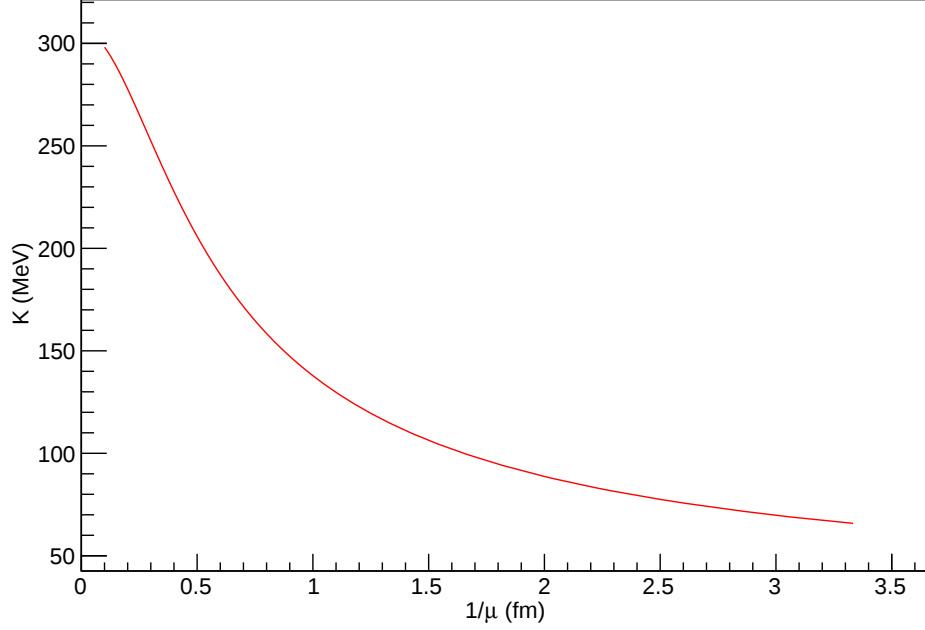


Figura 3.8: grafico per K_∞ in funzione di μ^{-1}

dettaglio i risultati ottenuti per K_∞ . Limitandoci a range presi entro l'intervallo (3.2) questi valori risultano essere più bassi rispetto al dato empirico. Per esempio in tabella 3.6 vediamo che per riuscire a rientrare nell'errore dovremo prendere un range $\mu \sim 2.4$, comunque al limite del nostro intervallo. Per avere un'idea più chiara sull'andamento dell'incompressibilità mostriamo in figura 3.8 il grafico di K_∞ in funzione dell'inverso del range, vale a dire $K_\infty(\mu^{-1})$. Come già visto in precedenza il valore di K_∞ aumenta con il diminuire della distanza del range d'interazione.

3.4.2 Materia neutronica

Studiamo ora le proprietà della materia neutronica con un'interazione del tipo (1.51). Per prima cosa andiamo a vedere come si modifica l'equazione

Tabella 3.7: valori per energia di simmetria e per la sua derivata al variare di μ

$\mu(fm^{-1})$	$S(\rho_0)(MeV)$	$L(\rho_0)(MeV)$
0.6	93.761	250.39
1	73.302	197.39
1.4	68.032	190.26
1.8	66.431	193.77
2.2	66.049	200.18

di stato, che in questo caso prenderà la forma

$$\varepsilon_n(\rho) = \frac{3^{\frac{5}{3}}\pi^{\frac{4}{3}}\hbar^2\rho^{\frac{2}{3}}}{10m} + \frac{(2a-b)\pi\rho}{\mu^2} + \left(\frac{81}{64\pi}\right)^{\frac{1}{3}}(2b-a)\rho^{\frac{1}{3}}I(k_{f_n}). \quad (3.25)$$

Inoltre scriviamo le formule valide per l'energia di simmetria $S(\rho)$ e la sua derivata $L(\rho)$:

- Per l'energia di simmetria avremo

$$S(\rho) = \frac{3^{\frac{5}{3}}\pi^{\frac{4}{3}}\hbar^2\rho^{\frac{2}{3}}}{10m}(1 - 2^{-\frac{2}{3}}) - \frac{b\pi\rho}{2\mu^2} + \left(\frac{81}{64\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\rho^{\frac{1}{3}} \left[(2b-a)I(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}}(2b-a)I(k_f), \right] \quad (3.26)$$

- per la derivata

$$L(\rho) = \frac{3^{\frac{5}{3}}\hbar^2\pi^{\frac{4}{3}}}{5m}\rho^{\frac{2}{3}}(1 - 2^{-\frac{2}{3}}) - \frac{3b\pi}{2\mu^2}\rho + \left(\frac{81}{64\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\rho^{\frac{1}{3}} \left[(2b-a)I(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}}(2b-a)I(k_f) \right] + 3\left(\frac{81}{64\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\rho^{\frac{4}{3}} \left[(2b-a)W(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}}(2b-a)W(k_f) \right] \quad (3.27)$$

Mantenendo i corrispettivi valori dei parametri trovati per la materia nucleare presenti in tabella 3.6 otteniamo i risultati presentati in tabella 3.7 per alcuni valori del range. Vediamo quindi che i risultati ottenuti non rispecchiano i dati sperimentali, essendo in entrambi i casi troppo alti. Per completezza abbiamo provato ad utilizzare anche il metodo del fit cercando di introdurre nel calcolo anche l'energia di simmetria e la sua derivata, ma i risultati ottenuti non risultano comunque soddisfacenti. Forzando il modello a fittare

Tabella 3.8: risultati per le proprietà fisiche utilizzando tutte e cinque le equazioni all' interno del fit con una Yukawa.

$\mu(fm^{-1})$	$\varepsilon(MeV)$	$P(\frac{MeV}{fm^3})$	$K_{\infty}(MeV)$	$S(MeV)$	$L(MeV)$
2.3646	-15.8714	-0.70314	170.81	57.532	173.24

tutte e cinque le equazioni con i rispettivi dati empirici otteniamo i risultati presenti in tabella 3.8. Peggiorano quindi tutti i valori per le proprietà della materia nucleare e non si riescono a riprodurre quelli per materia neutronica. Sarà necessario in seguito prendere in considerazione più parametri e vedere se così facendo riusciamo a migliorare i risultati.

3.5 Somma di due Yukawa con quattro parametri liberi

Vediamo ora come cambiano i risultati con l'aggiunta di altri 2 parametri liberi. In particolare siamo interessati a vedere se, avendo a disposizione 4 parametri, riusciamo a riprodurre meglio il valore dell'incompressibilità K_{∞} e le proprietà della materia neutronica. Prendiamo quindi la forma di potenziale

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \sum_{k=1,2} (a_k + b_k P_M) \frac{e^{-\mu_k |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (3.28)$$

Anche in questo caso dividiamo lo studio del problema in due parti, studiando da un lato la materia nucleare e dall'altro la materia neutronica. In questo paragrafo utilizzeremo sempre il metodo dei fit per il calcolo dei parametri. Abbiamo inoltre fissato i range μ_1 e μ_2 come in (3.7). Nel caso di materia nucleare fitteremo l'equazione di stato, la pressione e l'incompressibilità con i valori e gli errori sperimentali. Successivamente, per passare allo studio della materia neutronica, inseriremo nel calcolo del fit anche l'energia di simmetria e la sua derivata, trattando quindi un totale di cinque equazioni.

3.5.1 Materia nucleare

Iniziamo ricordando le formule valide per l'equazione di stato, la pressione e l'incompressibilità in presenza di un' interazione della forma (1.53) con $n = 2$:

3.5. SOMMA DI DUE YUKAWA CON QUATTRO PARAMETRI LIBERI

Tabella 3.9: valori dei parametri (in $MeV \cdot fm$) trovati fittando ε , P e K .

$4a_1 - b_1$	$4b_1 - a_1$	$4a_2 - b_2$	$4b_2 - a_2$
-25.065	173.673	880.642	-2640.83

Tabella 3.10: risultati per le proprietà fisiche fittando ε , P e K .

$\varepsilon(\rho_0)(MeV)$	$P(\rho_0)(\frac{MeV}{fm^3})$	$K_\infty(\rho_0)(MeV)$
-16	$4 \cdot 10^{-8}$	240

- per l'equazione di stato avremo

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{i=1,2} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{\pi^{\frac{4}{3}} \hbar^2 \rho^{\frac{2}{3}}}{5m} + \frac{(4a-b)\pi\rho}{2\mu^2} + \left(\frac{81}{128\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b-a) \rho^{\frac{1}{3}} I(k_f), \quad (3.29)$$

- per la pressione consideriamo la formula

$$P(\rho) = \sum_{i=1,2} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{5m} \rho^{\frac{5}{3}} + \frac{2a\pi}{\mu^2} \rho^2 + \left(\frac{3}{128\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b-a) \rho^{\frac{4}{3}} I(k_f) + \left(\frac{81}{128\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b-a) \rho^{\frac{7}{3}} W(k_f), \quad (3.30)$$

- per l'incompressibilità la formula corretta sarà

$$K_\infty(\rho) = \sum_{i=1,2} \left(\frac{\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{3^{\frac{5}{3}} \hbar^2}{5m} \rho^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{144\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b-a) \rho^{\frac{1}{3}} I(k_f) + \left(\frac{3}{16\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b-a) \rho^{\frac{4}{3}} W(k_f) + \left(\frac{81}{128\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b-a) \rho^{\frac{7}{3}} Z(k_f). \quad (3.31)$$

Inseriamo quindi nel calcolo del fit, all'interno della formula che definisce il χ^2 , le tre equazioni calcolate in $\rho = \rho_0$ insieme ai valori sperimentali ed i rispettivi errori. I risultati ottenuti per i parametri sono presentati in tabella 3.9, mentre i valori ottenuti per le proprietà fisiche sono presentati in tabella 3.10.

Notiamo che i fattori moltiplicativi caratteristici dei termini diretto e di scambio presentati in tabella 3.9, come già visto per il potenziale della forma

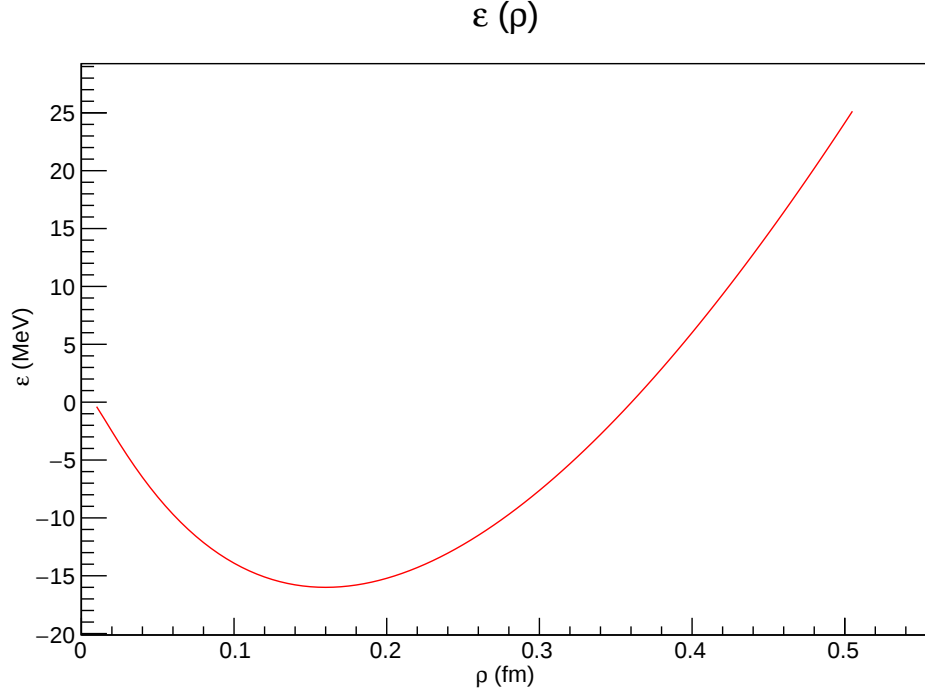


Figura 3.9: equazione di stato in materia nucleare per due Yukawa e quattro parametri liberi.

(3.10), non hanno l'andamento che ci aspetteremmo. Per esempio abbiamo un termine diretto negativo per la prima Yukawa (legato a $4a_1 - b_1$), mentre per la seconda lo stesso termine risulta essere positivo ($4a_2 - b_2$). Guardando la tabella 3.10 notiamo che il valore per K_∞ è notevolmente migliorato rispetto al caso di potenziale con singola Yukawa. Infine mostriamo in figura 3.9, l'andamento per l'equazione di stato in funzione di ρ . Il grafico rispecchia gli andamenti di ε visti nel caso di singola Yukawa presentati in figura (3.7).

3.5.2 Materia neutronica

Per studiare le proprietà della materia neutronica scriviamo prima di tutto le formule per S ed L in funzione di ρ valide per la somma di due Yukawa del tipo (1.51):

3.5. SOMMA DI DUE YUKAWA CON QUATTRO PARAMETRI LIBERI 51

Tabella 3.11: valori per le proprietà utilizzando tutte e cinque le equazioni per il fit.

$\varepsilon(\rho_0)(MeV)$	$P(\rho_0)(\frac{MeV}{fm^3})$	$K_\infty(\rho_0)(MeV)$	$S(\rho_0)$	$L(\rho_0)$
-15.9983	-0.01092	238.6	30.763	112.73

- per l'energia di simmetria avremo

$$S(\rho) = \sum_{k_{1,2}} \frac{3^{\frac{5}{3}} \pi^{\frac{4}{3}} \hbar^2 \rho^{\frac{2}{3}}}{10m} (1 - 2^{-\frac{2}{3}}) - \frac{b_k \pi \rho}{2\mu_k^2} + \left(\frac{81}{64\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} \quad (3.32)$$

$$\left[(2b_k - a_k)I(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}}(2b_k - a_k)I(k_f) \right].$$

- per la derivata

$$L(\rho) = \sum_{k_{1,2}} \frac{3^{\frac{5}{3}} \hbar^2 \pi^{\frac{4}{3}}}{5m} \rho^{\frac{2}{3}} (1 - 2^{-\frac{2}{3}}) - \frac{3b_k \pi}{2\mu_k^2} \rho + \left(\frac{81}{64\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}$$

$$\left[(2b_k - a_k)I(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}}(2b_k - a_k)I(k_f) \right] +$$

$$3 \left(\frac{81}{64\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} \left[(2b_k - a_k)W(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}}(2b_k - a_k)W(k_f) \right]. \quad (3.33)$$

Fittando quindi le tre equazioni considerate per il sistema nucleare più le due precedenti non riusciamo a trovare valori soddisfacenti per tutte e 5 le proprietà scelte. Infatti se andiamo a vedere la tabella 3.11, in cui abbiamo presentato i risultati ottenuti, notiamo che sebbene i valori per le proprietà nucleari risultino buoni, quelli per la materia neutronica non lo sono altrettanto. In particolare $S(\rho_0)$ risulta essere al limite entro l'errore sperimentale mentre $L(\rho_0)$ cade completamente fuori dall'intervallo. Forzando il modello a riprodurre tutte e 5 le proprietà notiamo quindi un lieve peggioramento per le tre proprietà nucleari rispetto, al caso in cui abbiamo fittato tre equazioni. A discapito di questo peggioramento non siamo comunque riusciti a riprodurre anche le proprietà della materia neutronica, e questo molto probabilmente è indice del fatto che dovremo considerare ancora più parametri per riuscire a fittare tutte e cinque le proprietà.

Successivamente sarà interessante andare a vedere la differenza di ordine di grandezza degli errori che il fit restituisce per i parametri calcolati sia per due che per tre Yukawa. Questi valori sono indice della bontà dei calcoli

ed in particolare ci aspettiamo che con tre Yukawa rimangano costanti o diminuiscano, così da avere la conferma che il nostro modello sta diventando sempre più preciso. Infatti l'ordine di grandezza degli errori rimane costante o, in alcuni casi, diminuisce di un fattore 10 come ci aspettavamo.

3.6 Somma di tre Yukawa con sei parametri liberi

Consideriamo infine il caso di un potenziale preso come somma di tre Yukawa. Ricordiamo ancora una volta la forma per il potenziale

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \sum_{k=1}^3 (a_k + b_k P_M) \frac{e^{-\mu_k |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (3.34)$$

da cui si ricaveranno tutte le proprietà del sistema fisico. Nella formula sono presenti 6 parametri liberi a_k e b_k e tre differenti range μ_k . Come accennato nel primo capitolo questi ci permetteranno di riprodurre al meglio l'andamento dell'interazione tra nucleoni nelle tre regioni spaziali considerate. Scegliamo quindi per i tre 3 valori dei range μ_k i medesimi scelti per le tre Yukawa senza termini di scambio

$$\mu_1 = 0.6 fm^{-1}, \quad \mu_2 = 1.5 fm^{-1}, \quad \mu_3 = 2.5 fm^{-1}. \quad (3.35)$$

Anche in questo caso adoperiamo il metodo dei fit, dividendo il problema in due parti. Per lo studio della materia nucleare abbiamo utilizzato l'equazione di stato, la pressione e l'incompressibilità, mentre per la materia neutronica abbiamo poi aggiunto al fit anche l'energia di simmetria e la sua derivata. Gli errori presi sono quelli sperimentali.

3.6.1 Materia nucleare

Prima di procedere con il fit scriviamo le formule che ci serviranno per il calcolo:

- per l'equazione di stato in funzione di ρ avremo

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{\pi^{\frac{4}{3}} \hbar^2 \rho^{\frac{2}{3}}}{5m} + \frac{(4a - b)\pi\rho}{2\mu^2} + \left(\frac{81}{128\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b - a) \rho^{\frac{1}{3}} I(k_f), \quad (3.36)$$

Tabella 3.12: valori dei parametri (in $MeV \cdot fm$) trovati fittando ε , P , K_∞ .

$4a_1 - b_1$	$4b_1 - a_1$	$4a_2 - b_2$	$4b_2 - a_2$	$4a_3 - b_3$	$4b_3 - a_3$
11.682	-38.009	471.417	-1620.18	793.476	-2174.48

Tabella 3.13: risultati per le proprietà fittando ε , P , K_∞ .

$\varepsilon(\rho_0)(MeV)$	$P(\rho_0)(\frac{MeV}{fm^3})$	$K_\infty(\rho_0)(MeV)$
-16	$2 \cdot 10^{-6}$	240

- per la pressione otteniamo

$$P(\rho) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{5m} \rho^{\frac{5}{3}} + \frac{2a\pi}{\mu^2} \rho^2 + \left(\frac{3}{128\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b - a) \rho^{\frac{4}{3}} I(k_f) +$$

$$\left(\frac{81}{128\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b - a) \rho^{\frac{7}{3}} W(k_f), \quad (3.37)$$

- per l' incompressibilità il risultato sarà

$$K_\infty(\rho) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{3^{\frac{5}{3}} \hbar^2}{5m} \rho^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{144\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b - a) \rho^{\frac{1}{3}} I(k_f) +$$

$$\left(\frac{3}{16\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b - a) \rho^{\frac{4}{3}} W(k_f) + \left(\frac{81}{128\pi} \right)^{\frac{1}{3}} (4b - a) \rho^{\frac{7}{3}} Z(k_f). \quad (3.38)$$

Come nel caso precedente inseriamo queste equazioni nella formula del χ^2 , prendendo i valori sperimentali e gli errori ad essi associati. I valori così trovati per i parametri e per le proprietà del sistema sono presentati in tabella 3.12 e 3.13. Notiamo come in questo caso i segni dei fattori moltiplicativi legati ai termini diretti e di scambio rispecchiano quelli riscontrati nel caso di singola Yukawa. Inoltre, come ci aspettavamo, i risultati per i valori sperimentali sono particolarmente buoni così come lo erano nel caso di potenziale con due Yukawa. Mostriamo quindi in figura 3.10 l'andamento dell'equazione di stato sia per 2 che per 3 Yukawa, notando come l'andamento rimane praticamente invariato.

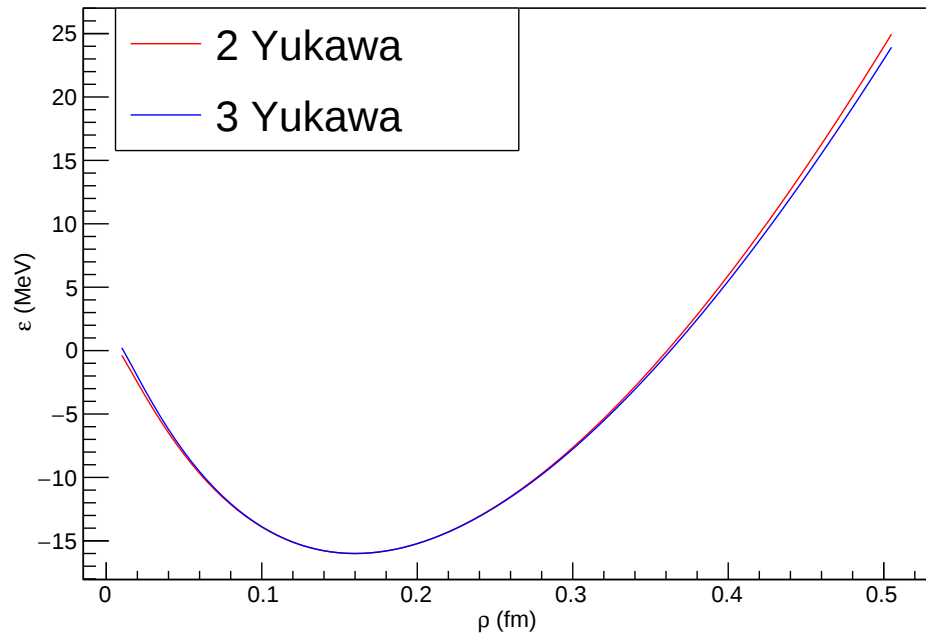


Figura 3.10: equazione di stato in materia nucleare per due e tre Yukawa.

Tabella 3.14: valori dei parametri (in $MeV \cdot fm$) trovati fittando ε , P , K_∞ , S , L .

$4a_1 - b_1$	$4b_1 - a_1$	$4a_2 - b_2$	$4b_2 - a_2$	$4a_3 - b_3$	$4b_3 - a_3$
-501.345	748.1	2684.95	-9770.23	-73.5257	15497.2

3.6.2 Materia neutronica

Vediamo quindi se con 6 parametri liberi a disposizione riusciamo a riprodurre anche le proprietà fisiche per la materia neutronica al punto di saturazione. Ricordiamo quindi le forme per S ed L con un' interazione del tipo (3.34)

- per l'energia di simmetria avremo

$$S(\rho) = \sum_{k_1}^3 \frac{3^{\frac{5}{3}} \pi^{\frac{4}{3}} \hbar^2 \rho^{\frac{2}{3}}}{10m} (1 - 2^{-\frac{2}{3}}) - \frac{b_k \pi \rho}{2\mu_k^2} + \left(\frac{81}{64\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} \quad (3.39)$$

$$\left[(2b_k - a_k) I(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}} (2b_k - a_k) I(k_f) \right].$$

- per la derivata

$$L(\rho) = \sum_{k_1}^3 \frac{3^{\frac{5}{3}} \hbar^2 \pi^{\frac{4}{3}}}{5m} \rho^{\frac{2}{3}} (1 - 2^{-\frac{2}{3}}) - \frac{3b_k \pi}{2\mu_k^2} \rho + \left(\frac{81}{64\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} \quad (3.40)$$

$$\left[(2b_k - a_k) I(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}} (2b_k - a_k) I(k_f) \right] +$$

$$3 \left(\frac{81}{64\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} \left[(2b_k - a_k) W(k_{f_n}) - 2^{-\frac{1}{3}} (2b_k - a_k) W(k_f) \right].$$

Fittando quindi un totale di 5 equazioni riusciamo ottenere i parametri ed i risultati mostrati in tabella 3.14 e 3.15. Vediamo che in questo caso siamo tornati ad avere fattori con segno casuale per i termini diretti e di scambio presenti all' interno dell' equazione di stato. Riusciamo comunque a riprodurre bene sia le proprietà per la materia nucleare che per la materia neutronica. Infatti notiamo un netto miglioramento per il valore di K_∞ rispetto al caso con due Yukawa, così come per i valori di $S(\rho_0)$ ed $L(\rho_0)$, che risultano entrambi pienamente entro l' errore sperimentale. Possiamo quindi affermare che con sei parametri liberi e tre range fissati riusciamo a riprodurre tutte le proprietà scelte per lo studio di questo modello. Mostriamo in figura 3.11 l'andamento per l'equazione di stato in materia nucleare ed in

Tabella 3.15: risultati per le proprietà fittando ε , P , K_∞ , S , L .

$\varepsilon_n(\rho_0)(MeV)$	$P(\rho_0)(\frac{MeV}{fm^3})$	$K_\infty(\rho_0)(MeV)$	$S(\rho_0)MeV$	$L(\rho_0)$
-15.9998	0.0015	241.06	32.107	56.48

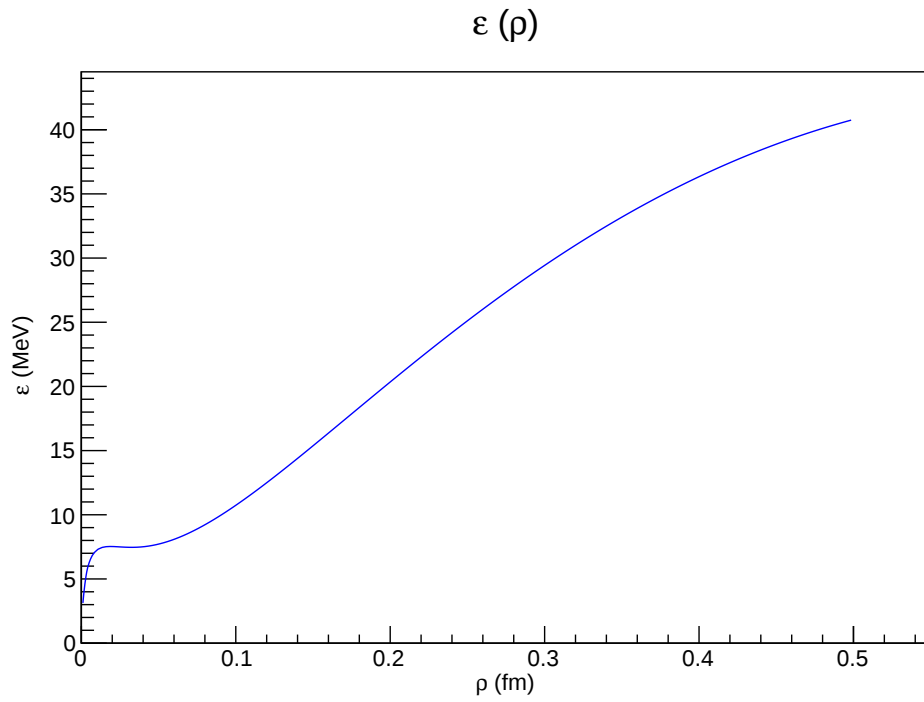


Figura 3.11: equazione di stato in materia neutronica.

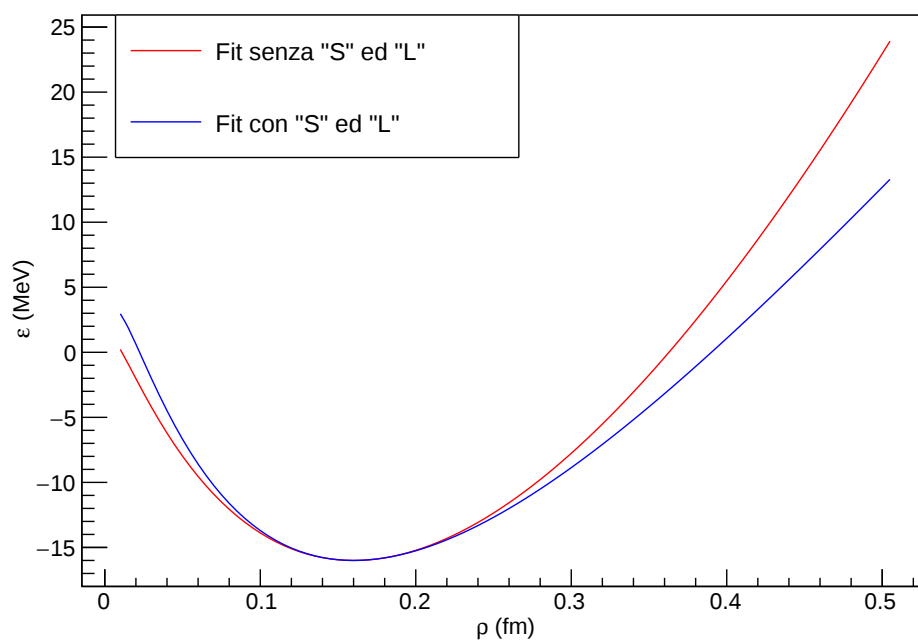


Figura 3.12: equazione di stato in materia nucleare fittando tre o cinque equazioni.

figura 3.12 come cambia l'equazione di stato per materia nucleare rispetto al caso in cui abbiamo fittato solamente tre proprietà. Notiamo che per basse densità in entrambi i casi si hanno comportamenti particolari, ma come abbiamo visto per i casi precedenti il nostro modello non è adatto a descrivere l'andamento per questi valori di densità.

3.7 Massa efficace in materia nucleare

In questo paragrafo vogliamo studiare come si comporta la massa efficace in materia nucleare nel nostro modello. In particolare siamo interessati al valore di $\frac{m^*}{m}$ per le diverse forme di potenziale da noi studiate. Partiamo quindi con lo studio della massa efficace per un potenziale della forma (1.51). Infatti, come già visto per l'equazione di stato, partendo da questo caso riusciremo successivamente a ricavare tutte le formule valide per gli altri potenziali da noi trattati. Come possiamo notare in (1.45), nella formula parametrica per la massa efficace, ci servirà prima di tutto calcolare il potenziale di singola particella $U(k)$, definito in (1.46). Per procedere con il calcolo ricordiamo che l'integrale sulle posizioni presente nella formula di $U(k)$ coincide con quello svolto nel secondo capitolo in (2.16) e (2.20). Parallelamente dovremo svolgere l'integrale sui momenti scegliendo una delle due variabili, k_i o k_j equivalentemente. Scegliamo quindi di integrare su k_j , ottenendo così

$$U(k) = \frac{2(4a-b)}{3\mu^2\pi}k_f^3 + \frac{4b-a}{\pi}k_f \left[1 - \frac{\mu}{k_f} \left[tg^{-1}\left(\frac{k_f+k}{\mu}\right) + tg^{-1}\left(\frac{k_f-k}{\mu}\right) \right] + \frac{\mu^2 + k_f^2 - k^2}{4k_f k} \ln\left(\frac{\mu^2 + (k_f+k)^2}{\mu^2 + (k_f-k)^2}\right) \right], \quad (3.41)$$

dove abbiamo scritto k_i come k , indicando il momento della particella considerata. Per la formula della massa efficace avremo

$$\begin{aligned} \frac{m^*}{m}(k) &= \left(1 + \frac{m}{\hbar^2 k} \frac{\partial U(k)}{\partial k} \right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{m}{\hbar^2 k} \frac{4b-a}{\pi} \left[\frac{\mu^2}{\mu^2 + (k_f-k)^2} - \frac{\mu^2}{\mu^2 + (k_f+k)^2} - \frac{\mu^2 + k_f^2 + k^2}{4k^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \ln\left(\frac{\mu^2 + (k_f+k)^2}{\mu^2 + (k_f-k)^2}\right) + \frac{k_f(\mu^2 + k_f^2 - k^2)^2}{k[\mu^2 + (k_f+k)^2][\mu^2 + (k_f-k)^2]} \right] \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Tabella 3.16: valori per la massa efficace al variare di μ .

$\mu(fm^{-1})$	$\frac{m^*}{m}$
0.6	0.425
1	0.427
1.4	0.423
1.8	0.417
2.2	0.413

Solitamente la massa efficace viene calcolata sulla superficie della sfera di Fermi, ovvero a $k = k_f$, e così faremo d' ora in avanti. La formula precedente diventa

$$\frac{m^*}{m}(k_f) = \left(1 + \frac{m}{\hbar^2} \frac{(4b - a)}{\pi k_f} \left[1 - \frac{\mu^2 + 2k_f^2}{4k_f^2} \ln\left(\frac{\mu^2 + 4k_f^2}{\mu^2}\right)\right]\right)^{-1} \quad (3.43)$$

A questo punto è interessante andare a vedere come varia il rapporto $\frac{m^*}{m}$ in funzione del range μ . Per ogni valore del range abbiamo preso volta per volta i parametri liberi a e b trovati con il metodo di Broyden e presentati in tabella 3.6. I valori così ottenuti per la massa efficace sono presentati in tabella 3.16. Mostriamo inoltre il grafico dell'andamento del rapporto $\frac{m^*}{m}$ in funzione dell'inverso del range (μ^{-1}) in figura 3.13. Notiamo che nel grafico i valori per $\frac{m^*}{m}$ variano in un intervallo

$$0.39 \leq \frac{m^*}{m} \leq 0.427. \quad (3.44)$$

Il valore massimo si trova nel punto in cui il rapporto satura, ovvero per $\mu \sim 0.85$, ed è comunque lontano dal valore empirico $\frac{m^*}{m} \sim 0.6 - 0.8$. Ci chiediamo quindi se per altre forme di potenziale in cui sono presenti più parametri il risultato possa migliorare. Prendiamo per esempio la somma di due e tre Yukawa (rispettivamente con 4 e 6 parametri liberi) della forma 1.53. La formula per la massa efficace sarà data semplicemente prendendo le somme di (3.43)

$$\frac{m^*}{m}(k_f) = \sum_k^n \left(1 + \frac{m}{\hbar^2} \frac{(4b_k - a_k)}{\pi k_f} \left[1 - \frac{\mu_k^2 + 2k_f^2}{4k_f^2} \ln\left(\frac{\mu_k^2 + 4k_f^2}{\mu_k^2}\right)\right]\right)^{-1}, \quad n = 2, 3 \quad (3.45)$$

Inserendo quindi nella formula i valori dei parametri calcolati fittando le proprietà della materia nucleare, presenti rispettivamente in tabella 3.9 e 3.12,

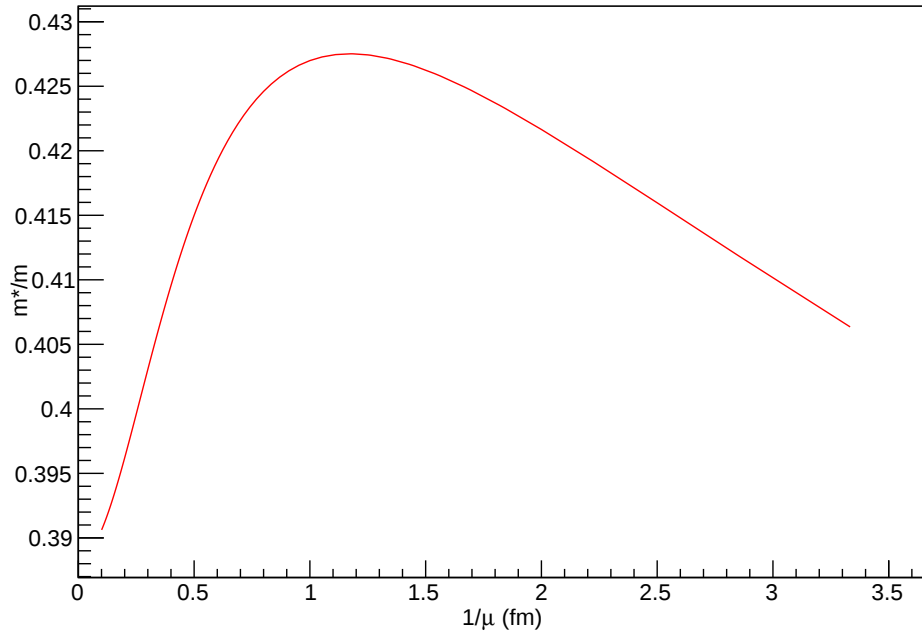


Figura 3.13: grafico della massa efficace in funzione di μ^{-1} .

otteniamo

$$\frac{m^*}{m}(k_f) = 0.354, \quad n = 2, \quad (3.46)$$

$$\frac{m^*}{m}(k_f) = 0.305, \quad n = 3. \quad (3.47)$$

Rispetto al caso con una sola Yukawa il valore si abbassa in entrambi i casi, peggiorando sempre più all' aumentare del numero di Yukawa presenti nel potenziale.

Vediamo infine i risultati ottenuti con un potenziale preso come somma di tre Yukawa con tre parametri liberi, l' unico tra le forme di potenziale senza termine di scambio che ha dato buoni risultati per le proprietà della materia nucleare. In questo caso la formula per la massa efficace si può scrivere come

$$\frac{m^*}{m}(k_f) = \sum_k^3 \left(1 - \frac{m}{\hbar^2} \frac{a_k}{\pi k_f} \left[1 - \frac{\mu_k^2 + 2k_f^2}{4k_f^2} \ln\left(\frac{\mu_k^2 + 4k_f^2}{\mu_k^2}\right) \right] \right)^{-1}. \quad (3.48)$$

Inserendo i parametri presentati in tabella 3.3 otteniamo il risultato

$$\frac{m^*}{m}(k_f) = 0.321, \quad (3.49)$$

un valore comunque inferiore a quello che ci aspetteremmo. Precisiamo comunque che la massa efficace è una proprietà di singola particella, al contrario delle altre considerate per questo lavoro, e non è strano riuscire a riprodurre le proprietà globali dei sistemi ma non questa proprietà.

Il fatto di ottenere risultati sempre discostanti dal valore atteso sembra essere una costante per lo studio di sistemi infiniti con teorie di campo medio senza termini dipendenti dalla densità. Sembrerebbe quindi necessaria l' aggiunta di termini *density dependent* per migliorare questo valore (si veda per esempio [11]).

Conclusione

Negli ultimi anni i modelli *SCMF* (*self-consistent mean-field*) hanno raggiunto un buon grado di affidabilità nel descrivere molte proprietà dello stato fondamentale e delle eccitazioni collettive dei nuclei. Solitamente per questi tipi di modelli il campo medio si costruisce a partire da interazioni costruite *ad hoc*, come nel caso di *Skyrme* e *Gogny*. Nel presente lavoro abbiamo scelto di utilizzare potenziali di tipo Yukawa per capire se il modello preso in esame sia in grado di riprodurre altrettanto bene le proprietà empiriche per la materia nucleare simmetrica e per quella neutronica. Inoltre una parte del lavoro è stata dedicata allo studio della massa efficace in materia nucleare. Abbiamo quindi utilizzato diverse forme di potenziale di tipo Yukawa con l'obiettivo di studiare le proprietà della materia nucleare e neutronica a livello di *Hartree-Fock* in un intorno del punto di saturazione.

Partendo dall'equazione di stato (*EoS*) siamo quindi giunti alle forme parametriche delle proprietà globali dei sistemi. Successivamente abbiamo cercato di capire quale fosse il numero minimo ed il valore corretto per i parametri al fine di riprodurre i dati empirici per queste proprietà nel punto di saturazione della materia nucleare.

Nel primo capitolo abbiamo presentato brevemente il problema a molti corpi, i due sistemi fisici e le forme di potenziale. Nel secondo capitolo abbiamo ricavato con calcoli di tipo Hartree-Fock le formule parametriche per l'equazione di stato e per le altre proprietà fisiche, partendo dalle diverse forme di potenziale. Infine, nel terzo capitolo, abbiamo studiato nel dettaglio queste formule e calcolato i valori dei parametri per poter riprodurre i dati empirici. Abbiamo iniziato considerando potenziali senza termini di scambio ottenendo i risultati seguenti:

- Imponendo ad una Yukawa con un parametro libero ed un range fissato (il cui valore viene imposto volta per volta) le condizioni per il punto di saturazione in materia nucleare non si riesce a riprodurre il punto di minimo dell' *EoS* per nessun valore del parametro.

- Imponendo a due Yukawa con due parametri e due range fissati (scelti per riprodurre l'andamento dell'interazione nucleare a medio e lungo-range) le condizioni per il punto di saturazione non riusciamo a riprodurre l'andamento sperato e la materia collassa.
- Con un potenziale strutturato come somma di tre Yukawa con tre parametri liberi e tre range fissati (i primi due come nel caso di doppia Yukawa, mentre il terzo in modo tale da riprodurre il core repulsivo a corto-range) riusciamo a riprodurre il punto di saturazione ed il valore corretto per l'incompressibilità in materia nucleare.
- Se consideriamo nel calcolo del fit anche le proprietà fisiche per la materia neutronica, con un potenziale della forma precedentemente considerata, non riusciamo a ricavare i valori empirici corretti per tutte le proprietà. Inoltre il grafico dell' EoS per la materia neutronica presenta valori negativi che non sono fisicamente accettabili.
- Lo studio per la massa efficace con tre Yukawa fornisce un valore più basso rispetto a quello ottenuto alla saturazione nucleare.

Successivamente siamo passati allo studio delle Yukawa con i termini di scambio, ed abbiamo percorso nuovamente la strada seguita in precedenza. Siamo così giunti ai seguenti risultati:

- Nel caso di singola Yukawa con due parametri liberi ed un range d'interazione, fissato volta per volta a diversi valori, riusciamo a riprodurre il punto di saturazione ma otteniamo dei valori per l'incompressibilità inferiori a quelli attesi, comunque entro l'errore sperimentale.
- Se con una Yukawa cerchiamo di riprodurre anche le proprietà per la materia neutronica non riusciamo a trovare dei buoni risultati né per l'energia di simmetria né per la sua derivata.
- Utilizzando un potenziale preso come somma di due Yukawa con quattro parametri liberi e due range, fissati al fine di coprire la media distanza e la coda dell'interazione, riusciamo a riprodurre il punto di saturazione ed il valore per l'incompressibilità entro i valori sperimentali.
- Con due Yukawa, cercando di fissare anche le condizioni per la materia neutronica, non riusciamo a trovare dei valori ragionevoli per la derivata dell'energia di simmetria, che risulta essere leggermente al di fuori dell'errore sperimentale.

- Se prendiamo la somma di tre Yukawa con sei parametri liberi e fissiamo i tre range d'interazione, per poter riprodurre anche l'andamento a corto-range, riusciamo a riprodurre bene le proprietà per la materia nucleare.
- Se con tre Yukawa cerchiamo di riprodurre anche le proprietà della materia neutronica otteniamo dei buoni risultati per tutte e cinque le proprietà considerate.
- Passando da due Yukawa a tre Yukawa abbiamo notato come gli errori sui valori dei parametri calcolati dal fit rimangono invariati o, in alcuni casi, diminuiscono di un fattore 10. Questo evidenzia la bontà del nostro modello ed è un indicatore del fatto che mancavano dei termini nel potenziale.
- I valori per la massa efficace risultano essere al di sotto del valore empirico per tutte e tre le forme di potenziale studiate. Il valore peggiora passando da un numero minore ad un numero maggiore di Yukawa.

Dunque se siamo interessati a riprodurre solamente le proprietà per la materia nucleare ci basterà prendere come potenziale la somma di tre Yukawa senza termini di scambio. Al contrario, se volessimo riprodurre anche le proprietà per la materia neutronica, dovremmo necessariamente considerare il potenziale in cui compaiono tre Yukawa ed i parametri legati all'operatore di scambio. Precisiamo comunque che il nostro modello è adatto a descrivere le proprietà dei sistemi fisici per valori di densità non troppo lontani da quello del punto di saturazione. Se volessimo migliorare la riproducibilità per valori di densità più piccoli o più grandi dovremo considerare sviluppi perturbativi di ordine maggiore.

Dobbiamo inoltre precisare che alcuni risultati ottenuti potrebbero essere un artificio numerico e non avere alcun senso fisico. Infatti se andiamo a vedere i segni dei fattori legati ai termini diretto e di scambio dell'*EoS* notiamo come in alcuni casi, per esempio per la somma di due Yukawa con quattro parametri liberi, i ruoli repulsivi ed attrattivi appaiono invertiti. Se da una parte questo ci permette di riprodurre numericamente per esempio il punto di saturazione, dall'altra comporta alcune difficoltà per la comprensione fisica del modello.

Infine ricordiamo che abbiamo sempre fissato i valori dei range d'interazione a valori fisici ragionevoli e, escludendo il caso con singola Yukawa, non abbiamo mai studiato come varia la riproducibilità delle proprietà per valori diversi di range.

Elaborati futuri potrebbero quindi indizzarsi verso un approfondimento fisico dei valori dei parametri, uno studio specifico sui valori dei range d' interazione, concentrarsi sul miglioramento della parte numerica dei fit, andare oltre all' approssimazione di Hartree-Fock o studiare potenziali con termini dipendenti dalla densità per risolvere il problema della massa efficace.

Appendice A

Metodo di Broyden

Il metodo di Broyden serve per trovare gli zeri di una funzione multidimensionale del tipo

$$\vec{F}(\vec{x}) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Per arrivare ad una soluzione possiamo prima di tutto approssimare tale funzione espandendola in serie di Taylor, tralasciando i termini di second'ordine

$$\vec{F}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) + \mathbf{J} \cdot \delta\vec{x}, \quad (\text{A.2})$$

dove $\mathbf{J}$ è la matrice Jacobiana della funzione vettoriale $\vec{F}(\vec{x})$. Se prendiamo $\vec{F}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = 0$ otteniamo un sistema lineare in $\delta\vec{x}$ che muove ogni funzione sempre più vicina allo zero

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\mathbf{J} \cdot \delta\vec{x}. \quad (\text{A.3})$$

La correzione sulle $\vec{x}_i$ viene presa volta per volta come $\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \delta\vec{x}$, iterando il procedimento fino alla convergenza. Questo metodo prende il nome di *Newton-Raphson*. Il metodo presenta alcuni svantaggi, uno su tutti il fatto che il calcolo esplicito della matrice Jacobiana è spesso complicato. Per ovviare a questo problema si utilizza un metodo chiamato *metodo delle secanti*, nel quale si approssima la matrice Jacobiana $\mathbf{J}$ con una matrice $\mathbf{B}$. Quindi si ottiene

$$\vec{F}_i = \mathbf{B}_i \cdot \delta\vec{x}_i, \quad (\text{A.4})$$

e come condizione per il *metodo delle secanti* si ha

$$\delta\vec{F}_i = \mathbf{B}_{i+1} \cdot \delta\vec{x}_i. \quad (\text{A.5})$$

La definizione di $\mathbf{B}_{i+1}$ non è univoca. Il *metodo di Broyden* permette di ovviare a questo problema prendendo $\mathbf{B}_{i+1}$ considerando la condizione per

le secanti, ottenendo così

$$\mathbf{B}_{i+1} = \mathbf{B}_i + \frac{(\delta \vec{F}_i - \mathbf{B}_i \delta \vec{x}_i) \otimes \delta \vec{x}_i}{\delta \vec{x}_i \cdot \delta \vec{x}_i} \quad (\text{A.6})$$

Questo metodo converge super-linearmente ¹ una volta vicino alla radice.

¹Una successione x converge super-linearmente al suo limite α se esiste una sequenza $c \rightarrow 0$ ed un N_0 che soddisfano $|x_n + 1 - \alpha| \leq c_{N_0} |x_n - \alpha|$.

Appendice B

Metodo del fit

La procedura seguita in questo lavoro per trovare i valori dei parametri che meglio approssimano i dati sperimentali è quella della minimizzazione del χ^2 , una funzione definita come

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \frac{y_k - f_k^c(x_0; a, b, \dots)}{\sigma_k} \right)^2 \quad (\text{B.1})$$

nel quale y_k rappresenta il valore sperimentale di una determinata proprietà, $f_k^c(x_0; a, b, \dots)$ il valore ottenuto con le nostre formule parametriche, σ_k l'errore stimato per il valore sperimentale ed N il numero di equazioni che scegliamo di fittare. Tale funzione, infatti, fornisce una prima stima sull'esattezza delle nostre formule e per migliorarla cerca di aggiustare i parametri affinché il valore del χ^2 risulti il più basso possibile. Cercare di minimizzare una funzione come quella precedente è spesso complicato, e per questo abbiamo utilizzato alcuni metodi numerici precompilati.

Le formule che abbiamo utilizzato in questo lavoro sono quelle legate alle proprietà dei sistemi da noi considerati, ovvero l'equazione di stato, la pressione, l'incompressibilità, l'energia di simmetria e la sua derivata, calcolate tutte al punto di saturazione $\rho = \rho_0$. All'interno del χ^2 abbiamo associato ai fattori y_k i valori empirici, mentre per gli errori abbiamo tenuto quelli presentati nel primo capitolo con le proprietà. Caso per caso abbiamo quindi scelto quante e quali tra queste equazioni utilizzare, considerando prima quelle nucleari e successivamente anche quelle neutroniche.

Per semplificare lo studio di questi sistemi abbiamo quindi implementato i calcoli in un programma *C++*, utilizzando le librerie precompilate di *ROOT* in cui troviamo diversi metodi già implementati per svolgere il fit. Nel nostro caso abbiamo utilizzato la libreria *TMinuit.h* con un metodo di minimizzazio-

ne (locale) denominato *MIGRAD*. Questo metodo chiede di scrivere la forma esplicita per la funzione χ^2 , e restituisce i valori dei parametri che meglio approssimano le nostre equazioni ai dati sperimentali. Dobbiamo comunque precisare che questo metodo localizza minimi locale per il χ^2 , e non tiene conto di altri possibili minimi. Sarà quindi importante indirizzare il metodo sulla via corretta fornendo adeguati punti iniziali, anche se nel nostro lavoro questo studio non è stato fatto.

Bibliografia

- [1] Steven C. Pieper, K. Varga, R. B. Wiringa, *Quantum Monte Carlo calculations of $A=9,10$ nuclei*, Phys. Rev. C 66, 044310 (2002), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.66.044310>.
- [2] R. D. Mattuck, *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*, Dover Publications Inc., New York, United States (1992).
- [3] B. R. Barretta, P. Navrátilb, J. P. Vary, *Ab initio no core shell model*, Phys. Rep. Volume 69, Pages 131–181 (2013), DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ppnp.2012.10.003>.
- [4] G. Hagen, T. Papenbrock, D. J. Dean, and M. Hjorth-Jensen, *Ab initio coupled-cluster approach to nuclear structure with modern nucleon-nucleon interactions*, Phys. Rev. C 82, 034330 (2010), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.82.034330>.
- [5] M. Bender, P. H. Heenen, P. G. Reinhard, *Self-consistent mean-field models for nuclear structure*, Rev. Mod. Phys. 75, 121 (2003), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.75.121>.
- [6] T. H. R. Skyrme, *The effective nuclear potential*, Phys. Rep. Volume 9, Issue 4, Pages 615-634 (1959), DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582\(58\)90345-6](http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582(58)90345-6).
- [7] R. Sellaheewa, A. Rios, *Isovector properties of the Gogny interaction*, Phys. Rev. C 90, 054327 (2014), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.90.054327>.
- [8] G. Bertsch, J. Borysowicz, H. McManus and W.G. Love, *Interactions for inelastic scattering derived from realistic potentials*, Nuclear Physics A, Volume 284, Issue 3, Pages 399-419 (1977). DOI: 10.1016/0375-9474(77)90392-X, URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037594747790392X>.

- [9] R. Romano, *Contributo dell'energia di correlazione all'equazione di stato della materia nucleare*, Tesi di laurea triennale per la facoltà di Fisica dell'Università degli Studi di Milano, non pubblicato (2015).
- [10] G. Accorto, *Sensitivity of Nuclear Matter Properties to the Range of the Effective Interaction*, Tesi di laurea triennale per la facoltà di Fisica dell'Università degli Studi di Milano, non pubblicato (2015).
- [11] T. Nakatsukasa, K. Matsuyanagi, M. Matsuo, K. Yabana, *Time-dependent density-functional description of nuclear dynamics*, arXiv:1606.04717 [nucl-th] (2016), URL: <http://arxiv.org/pdf/1606.04717v1.pdf>
- [12] Dao T. Khoa, W. von Oertzen, and H. G. Bohlen, *Double-folding model for heavy-ion optical potential: Revised and applied to study C12 and O16 elastic scattering*, Phys. Rev. C 49, 1652 (1994), DOI: <http://dx.doi.org/pros.lib.unimi.it/10.1103/PhysRevC.49.1652>
- [13] P. Haensel A. Y. Potekhin, D. G. Yakovlev, *Neutron stars 1 - equation of state and structure*, Springer Science (2006), url : <http://www.springer.com/fr/book/9780387335438>.
- [14] S. S. M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Wiley-VCH Verlag GmbH (2007), DOI : <http://dx.doi.org/10.1002/9783527617906.fmatter>.
- [15] N. Alam, B. K. Agrawal, J. N. De, S. K. Samaddar, G. Colò, *Equation of state of nuclear matter from empirical constraints*, Phys. Rev. C 90, 054317 (2014), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.90.054317>.
- [16] C Mahaux, P.F Bortignon, R.A Broglia, C.H Dasso, *Dynamics of the shell model*, Physics Reports, Volume 120, Issues 1–4, Pages 1-274 (1985), DOI: 10.1016/0370-1573(85)90100-0.
- [17] G. Colò, *Dispense del corso di Fisica Nucleare tenuto presso la Facoltà di Fisica dell' Università degli studi di Milano*, (2015-2016), URL : <http://www.mi.infn.it/~colo/Didattica/Nucleare/nuclphys.pdf>
- [18] J. D. Walecka, *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics, second edition*, Imperial College Press, World Scientific Publishing (2004).
- [19] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems (Dover Books on Physics)*, Dover Publications (2003).

- [20] J.P. Blaizot, *Nuclear compressibilities*, Phys. Rep. Volume 64, Issue 4, pages 171–248 (1980), DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(80\)90001-0](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(80)90001-0).
- [21] W. H. Press, *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*, 3rd ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, (2007).