



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea Triennale in Fisica

**Effetti del campo magnetico
sulla composizione della crosta esterna
delle stelle di neutroni**

Relatore: Prof. Gianluca Colò

Correlatore: Dott. Xavier Roca-Maza

Elaborato di:

Davide Basilico

Matr. 780553

Codice P.A.C.S.: 26.60. c

Anno Accademico 2012-2013

Nothing in life is to be feared, it is only to be understood.

Marie Curie

Sommario

Le stelle di neutroni sono oggetti astrofisici compatti il cui studio, affascinante sia da un punto di vista teorico che osservazionale, è ben lontano dall'essere definito concluso. Caratterizzate da una densità media superiore alla densità della materia nucleare, presentano una vasta gamma di fenomeni e di proprietà finora non riscontrati altrove in astrofisica. Per questo motivo le stelle di neutroni sono soggette a un elevato interesse da parte della comunità scientifica: vengono infatti studiate sia per la verifica di teorie, come la relatività generale, sia per l'elaborazione di nuovi modelli, ad esempio riguardanti il comportamento della materia in condizioni estreme.

Le condizioni della materia nella crosta esterna, la regione su cui viene focalizzato l'elaborato, non sono estreme come quelle che si incontrano nel *core*, la regione più interna, ma risultano comunque di gran lunga al di là delle possibilità di riproduzione nei moderni laboratori scientifici. I costituenti sono soggetti a pressioni elevate e a campi magnetici in grado di raggiungere, nei casi più eccezionali, massimi superficiali dell'ordine dei 10^{15} G. A scopo di confronto, è utile sottolineare che il campo magnetico più intenso mai generato dall'uomo ha raggiunto *solamente* $3 \cdot 10^7$ G [1]. La descrizione della materia della crosta esterna richiede l'utilizzo di numerosi strumenti e concetti sviluppati in diverse branche della fisica, a partire dalla fisica nucleare fino ad arrivare alla fisica della materia condensata.

Nel primo capitolo viene presentata una breve panoramica generale riguardante le caratteristiche fondamentali delle stelle di neutroni. L'obiettivo della sezione non è quello di esporre una trattazione completa ed esaustiva, che risulterebbe estremamente vasta, ma piuttosto di coprire gli argomenti necessari alla comprensione delle analisi presenti nei capitoli successivi. Nell'elaborato ci si concentra sulle modalità di formazione delle stelle di neutroni, sul moto rotazionale, sulla struttura interna e sulla presenza dei campi magnetici. A quest'ultimo aspetto è stata dedicata una particolare attenzione, evidenziando una delle ipotesi riguardanti l'origine dei campi e le motivazioni per cui le intensità osservate siano estremamente elevate.

Il secondo capitolo inizia con un'analisi energetica dei costituenti della crosta esterna di neutroni. In seguito vengono esposti il procedimento di determinazione della composizione dei nuclei presenti nella crosta esterna al variare della pressione e i relativi risultati, utilizzando il modello a goccia liquida e successivamente il modello di Duflo-Zuker per la descrizione delle energie di legame nucleari.

Nel terzo capitolo la composizione della crosta esterna viene resa più realistica aggiungendo gli effetti del campo magnetico sul gas elettronico. Preliminarmente viene esaminato da un punto di vista teorico il sistema costituito da un elettrone sottoposto a un campo magnetico omogeneo e costante nel tempo, sia classicamente sia quantisticamente; il passo successivo è quello di considerare un gas di elettroni a temperatura nulla immerso in un campo magnetico. Successivamente viene determinata la composizione considerando quattro valori di campo magnetico realistici per la stella di neutroni, presentando poi i principali risultati ottenuti.

In appendice vengono descritte le modalità di calcolo della densità degli stati per un gas di elettroni non interagenti a temperatura nulla, sia in assenza sia in presenza di

un campo magnetico omogeneo. I risultati ottenuti, già noti in letteratura, sono stati utilizzati rispettivamente nel secondo e nel terzo capitolo.

Indice

1	Proprietà generali delle stelle di neutroni	7
1.1	Pulsar e campi magnetici	8
1.2	Formazione	12
1.3	Struttura interna	13
2	Composizione della crosta esterna in assenza di campo magnetico	16
2.1	Bilancio energetico della crosta esterna	16
2.2	Determinazione della sequenza di nuclei	22
2.2.1	Modello a goccia liquida	22
2.2.2	Modello di Duflo-Zuker	30
3	Composizione della crosta esterna in presenza di campo magnetico	34
3.1	Effetti di un campo magnetico su un elettrone isolato	34
3.2	Effetti di un campo magnetico su un gas di elettroni a $T = 0$	36
3.3	Determinazione della sequenza di nuclei	39
	Conclusioni	46
A	Densità degli stati di un gas di elettroni a $T = 0$	48
	Bibliografia	51

Capitolo 1

Proprietà generali delle stelle di neutroni

In questa prima sezione dell'elaborato vengono presentate le principali caratteristiche delle stelle di neutroni; lo scopo non è quello di coprire esaustivamente tutti gli aspetti ad esse collegati, ma di fornire una panoramica generale utile per la comprensione delle analisi sulla crosta esterna che verranno svolte nei capitoli successivi [2] [3].

Storicamente la prima ipotesi riguardante l'esistenza delle stelle di neutroni fu avanzata da Walter Baade e Fritz Zwicky nel 1934, due anni dopo la scoperta del neutrone da parte di James Chadwick [4]. Esposero l'idea secondo cui le supernovae rappresentano uno stadio di transizione da una stella ordinaria ad una stella di neutroni, un oggetto compatto caratterizzato da una concentrazione di materia estremamente elevata. La scoperta sperimentale risale al 1965, anno in cui Jocelyn Bell, una studentessa dell'astronomo Anthony Hewish, osservò un'insolita sorgente di radiazioni nella Nebulosa del Granchio, nell'intervallo di frequenza delle onde radio [5]: si trattava di una stella di neutroni derivante da un evento di supernova risalente a quasi mille anni prima. Nove anni dopo, Hewish fu premiato con il Premio Nobel per la Fisica [6].

Una stella di neutroni ha origine dal collasso gravitazionale del *core*, ovvero la regione più interna, di una stella ordinaria massiva ($M_{\text{star}} \geq 8 M_{\odot}$). È un oggetto astrofisico compatto, con valori tipici di massa $M \sim 1.4 M_{\odot}$ e raggio $r \sim 10$ km [3]. La più massiva stella di neutroni attualmente nota, scoperta nel 2013, ha una massa di $(2.01 \pm 0.04) M_{\odot}$ [7].

La densità media $\langle \rho \rangle$ di una stella di neutroni supera di svariati ordini di grandezza le densità tipiche della materia ordinaria. Utilizzando i valori di massa e raggio caratteristici citati in precedenza, si ha:

$$\langle \rho \rangle = \frac{3M}{4\pi r^3} \sim (7 - 9) \cdot 10^{14} \text{ g cm}^{-3} \sim (2 - 3) \rho_{nuc}$$

dove $\rho_{nuc} = 2.8 \cdot 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ è la densità della materia nucleare. Considerando la stella come una sfera di densità omogenea si può supporre quindi che, a causa dell'elevatissima densità, i neutroni siano confinati in volumi talmente piccoli da venire in contatto, creando un unico gigantesco nucleo con numero di massa $A \sim 10^{54}$ mantenuto stabile

grazie all'equilibrio tra l'interazione forte e l'interazione gravitazionale. Questa interpretazione ha il difetto di trascurare l'esistenza della struttura interna, la cui importanza è fondamentale negli studi delle stelle di neutroni.

Il collasso gravitazionale della stella di neutroni viene impedito dalla pressione di degenerazione esercitata dai neutroni, o più in generale dai fermioni, presenti nelle regioni interne; dovuta al principio di esclusione di Pauli, permette l'equilibrio idrostatico della stella. Per un'idea dell'entità della forza gravitazionale, è utile stimare l'accelerazione gravitazionale in prossimità della superficie g e l'energia gravitazionale totale E_g , confrontando i risultati con i valori riferiti alla Terra g_t e $(E_g)_t$:

$$g \sim \frac{GM}{r^2} \sim 2 \cdot 10^{14} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \sim 2 \cdot 10^{13} g_t$$

$$E_g \sim \frac{GM^2}{r} \sim 5 \cdot 10^{46} \text{ J} \sim 10^{14} (E_g)_t$$

A causa dell'intensa gravità, gli effetti dovuti alla curvatura dello spazio-tempo non possono essere ignorati, rendendo necessaria la teoria della relatività generale per uno studio globale della stella. Per questo motivo le stelle di neutroni sono considerate buone candidate per l'emissione di onde gravitazionali: utilizzando interferometri estremamente accurati si tenta di riscontrare evidenze empiriche di questo fenomeno. Tuttavia finora non sono stati ottenuti risultati significativi [8].

La struttura globale di una stella di neutroni dipende dall'equazione di stato nelle regioni interne della stella, ovvero la relazione tra pressione e densità. Ad oggi le proprietà fisiche della materia in queste condizioni estreme possono essere studiate solamente sulla base di modelli teorici. Data un'equazione di stato si possono ricavare la relazione massa-raggio e i limiti previsti di massa minima M_{min} e massima M_{max} [9]. Per limitare il numero di modelli plausibili e per comprendere il comportamento della materia a questi ordini di densità, è fondamentale quindi una misura di M e r . Sono note con buona accuratezza numerose masse per stelle di neutroni in sistemi binari [10] [11], mentre non sono disponibili valori accurati per i raggi, per i quali le procedure sperimentali consistono in analisi di spettri di radiazione elettromagnetica nel range di frequenza X [12] [13].

Un esempio di emissione di una stella di neutroni e della nebulosa in cui è situata è rappresentato in figura 1.1. CXOU J061705 è una stella di neutroni collocata nella Nebulosa Medusa; originatasi trentamila anni fa, si muove nello spazio con velocità approssimativamente pari a $2.2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$. L'immagine, in falsi colori, combina l'emissione X in blu, l'emissione radio in verde e l'emissione ottica in rosso, ottenute dai dati raccolti rispettivamente da *Chandra*, *Very Large Array* e *Digitized Sky Survey* [14]. Il riquadro di ingrandimento si focalizza sull'emissione della stella di neutroni.

1.1 Pulsar e campi magnetici

Ad oggi è nota l'esistenza di circa duemila stelle di neutroni, per la maggior parte dei casi scoperte rilevando gli impulsi elettromagnetici emessi a frequenze radio o X , di periodo stabile e nell'ordine dei secondi o dei millisecondi. Una stella di neutroni caratterizzata

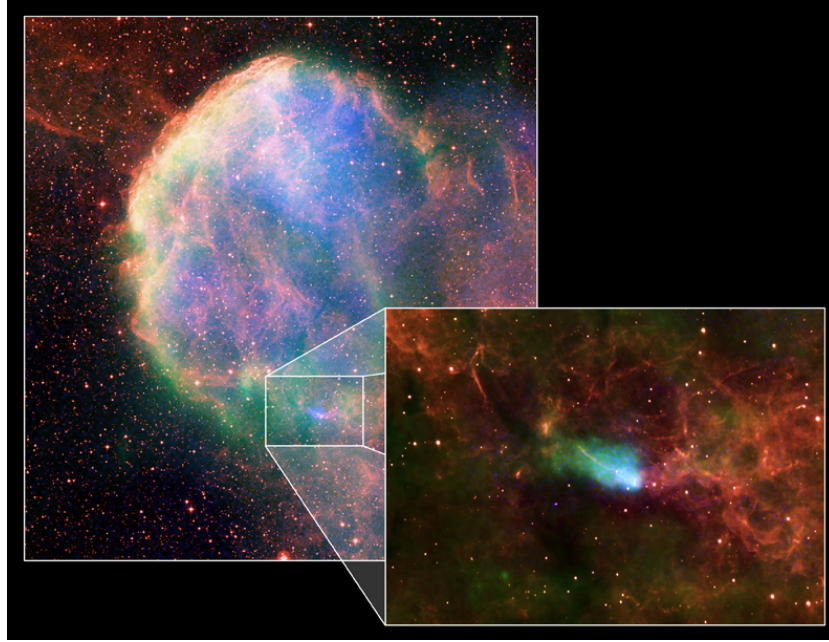


Figura 1.1: Emissione della stella di neutroni CXOU J061705, collocata nella Nebulosa Medusa. L'immagine, in falsi colori, combina l'emissione X in blu, l'emissione radio in verde e l'emissione ottica in rosso, ottenute dai dati raccolti rispettivamente da *Chandra*, *Very Large Array* e *Digitized Sky Survey*. Il riquadro di ingrandimento si focalizza sull'emissione della stella di neutroni.

da questa tipologia di emissione viene detta *pulsar*, termine ottenuto contraendo dall'inglese *pulsating star*.

Per comprendere la natura pulsata dell'emissione è necessario osservare preliminarmente che la conservazione del momento angolare per una stella ordinaria comporta, successivamente al collasso gravitazionale, un'elevata velocità rotazionale della neonata stella di neutroni. Considerando per una stella ordinaria un periodo $T_i \sim T_\odot \sim 28$ d e un raggio del *core* $r_i \sim r_\odot \sim 7 \cdot 10^5$ km, e ammettendo che i due oggetti siano sfericamente simmetrici, si può stimare in prima approssimazione l'ordine di grandezza caratteristico dei periodi. Indicando con L , I , ω rispettivamente il momento angolare, il momento di inerzia e la velocità angolare del *core* e della stella di neutroni, si ha:

$$L_i = L_f \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2}{5}M_i r_i^2\right)\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = I_i \omega_i = I_f \omega_f = \left(\frac{2}{5}M_f r_f^2\right)\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)$$

$$T_f = \left(\frac{r_f}{r_i}\right)^2 T_i \sim 10^{-10} T_i \sim 10^{-3} \text{ s}$$

La rotazione e la presenza di campi magnetici sono strettamente collegati. Le stelle di neutroni sono dotate infatti dei campi magnetici più intensi mai rilevati dall'uomo. I tipici valori per le pulsar sono nell'ordine dei $(10^{12} - 10^{13})$ G; il record appartiene alla magnetar SGR 1806-20, che raggiunge superficialmente $2.4 \cdot 10^{15}$ G [15]. Le regioni più interne, vista l'elevata densità, non risentono significativamente dell'influenza del campo,

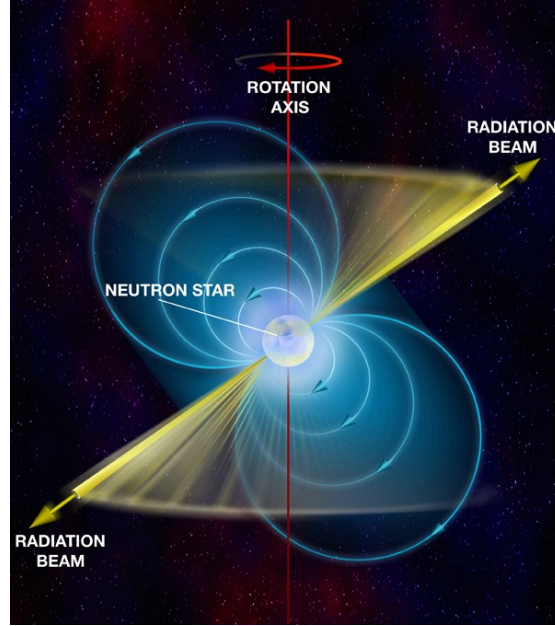


Figura 1.2: Illustrazione del meccanismo di emissione di una stella di neutroni rotante secondo il modello di dipolo magnetico. La linea gialla indica l'asse magnetico della stella, la linea rossa l'asse di rotazione, le linee azzurre il campo magnetico generato [16].

mentre non sono trascurabili gli effetti sulle zone più esterne, quali atmosfera e crosta esterna [3].

Il modello di dipolo magnetico, illustrato graficamente in figura 1.2, è il modello più semplice in grado di spiegare le emissioni elettromagnetiche delle pulsar, collegando la radiazione emessa alla perdita di energia cinetica di rotazione [17] [18]. Si ipotizza che la stella ruoti rigidamente nel vuoto con frequenza ω , con un momento di dipolo magnetico $\vec{m}$ orientato di un angolo θ rispetto all'asse di rotazione.

Il momento di dipolo individua un asse magnetico, lungo la direzione del quale viene emessa la radiazione sotto forma di fascio di fotoni. Il disallineamento dei due assi implica la rotazione nel tempo dell'asse di emissione: in un periodo di rotazione la radiazione può essere visualizzata da un osservatore sotto forma di singolo impulso, nonostante l'emissione sia in realtà continua nel tempo (*lighthouse effect*, o *effetto faro*). Indicando con B_p l'intensità del campo magnetico in corrispondenza dei poli magnetici della stella, il momento magnetico $\vec{m}$ e la potenza P sono [19]:

$$|\vec{m}|^2 = \frac{1}{2} B_p r^3 \quad P = \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{2}{c^3} |\ddot{\vec{m}}|^2$$

Scomponendo il momento di dipolo magnetico in direzione parallela all'asse di rotazione e lungo due assi perpendicolari all'asse di rotazione, ortogonali l'uno rispetto all'altro, si ottiene¹:

¹ $\hat{e}_{\parallel}$, $\hat{e}_{\perp 1}$ e $\hat{e}_{\perp 2}$ indicano i versori lungo i tre assi specificati nel testo.

$$\vec{m} = \frac{1}{2}B_p r^3 (\hat{e}_{\parallel} \cos \alpha + \hat{e}_{\perp 1} \sin \alpha \sin \omega t + \hat{e}_{\perp 2} \sin \alpha \cos \omega t)$$

$$\ddot{\vec{m}} = \frac{1}{2}B_p r^3 (-\hat{e}_{\perp 1} \omega^2 \sin \alpha \sin \omega t - \hat{e}_{\perp 2} \omega^2 \sin \alpha \cos \omega t)$$

$$P = -\frac{B_p^2}{6c^3} \omega^4 r^6 \sin^2 \alpha$$

Analizzando il moto rotazionale, si ottiene:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad P_{rot} = \dot{E}_{rot} = I\omega\dot{\omega} = P = -\frac{B_p^2}{6c^3} \omega^4 r^6 \sin^2 \alpha$$

$$\dot{\omega} = -\frac{2B_p^2 \omega^3 r^6 \sin^2 \alpha}{3Ic^2}$$

Dall'equazione precedente segue che $\dot{\omega}$ è negativo e di conseguenza il moto rotazionale della pulsar rallenta nel tempo, come viene osservato sperimentalmente. A partire dalle misure empiriche di ω e $\dot{\omega}$ e inserendo i valori teorici di r e I , si riesce a dare una stima di B_p . Questo modello, pur essendo schematico e approssimativo, fornisce una valutazione accettabile dell'intensità dei campi magnetici, nonostante la fisica alla base del fenomeno di emissione delle pulsar sia complessa e richieda modelli più elaborati e profondi [20].

Il problema dell'origine di campi così elevati non è tuttora completamente risolto. Una stella di neutroni potrebbe ereditare il campo da una stella ordinaria, amplificatosi durante il collasso gravitazionale grazie alla conservazione del flusso magnetico [17] [21]. La contrazione di un *core* di Fe di raggio $r_{core} \sim 10^3$ km in una stella di neutroni di raggio $r_{ns} \sim 10$ km causa un aumento del campo magnetico di un fattore 10^4 . Infatti, indicando con Φ_{core} e Φ_{ns} i flussi magnetici del campo:

$$\Phi_{ns} = \Phi_{core} \quad \Rightarrow \quad \frac{B_{ns}}{B_{core}} \sim \frac{r_{core}^2}{r_{ns}^2} \sim 10^4$$

Dopo la generazione, i campi potrebbero rimanere costanti del tempo grazie alla conservazione del flusso magnetico nelle zone più dense della stella, dove i neutroni sono superfluidi [3]. Sperimentalmente il campo magnetico può essere misurato analizzando gli spettri di emissione elettromagnetica nel range X e ricercando le frequenze corrispondenti alle linee di ciclotrone, caratteristiche dell'interazione degli elettroni con il campo [22] [23].

Il teorema del viriale fornisce una stima del campo magnetico massimo consentito ad una stella di neutroni [24]: un campo $B_{max} \sim (10^{18} - 10^{19})$ G non può essere sostenuto dalla stella perché l'energia magnetica, proporzionale a $B_{max}^2 r^3$, superando l'energia di attrazione gravitazionale, ostacolerebbe il verificarsi della condizione di equilibrio idrostatico rendendo instabile la stella.

1.2 Formazione

La dinamica della composizione di una stella ordinaria è regolata dai processi esotermici di fusione termonucleare che avvengono nelle regioni interne. Una stella si trova in stato di equilibrio idrostatico quando la pressione termica, dovuta al movimento dei costituenti, bilancia la pressione gravitazionale; in queste condizioni il volume e la potenza di emissione si mantengono costanti nel tempo [25].

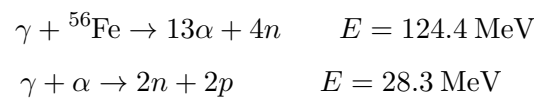
Nel primo stadio di vita della stella l'energia termica viene generata dalla fusione dell'idrogeno in elio, reazione che libera un'energia pari a 28.2 MeV. Quando la maggior parte dei protoni nel *core* si è trasformata in elio la produzione di energia per fusione decresce rapidamente, mentre la temperatura diminuisce per irraggiamento. Il *core* stellare si contrae a causa dell'attrazione gravitazionale, non più bilanciata dalla pressione termica, e conseguentemente la temperatura riprende a salire.

Raggiunti i 10^8 K, l'energia cinetica dei nuclei di elio è sufficientemente alta per innescare la fusione in carbonio, con nuova liberazione di energia. Se la massa della stella è confrontabile con la massa solare i processi di fusione cessano con l'esaurimento dell'elio, e la luminosità della stella decresce gradualmente fino al completo esaurimento dell'energia gravitazionale; la stella diventa una nana bianca. Nelle stelle più massive, invece, si verifica un'ulteriore contrazione che aumenta la temperatura: a circa 10^9 K diventa possibile la fusione del ^{12}C . Si susseguono quindi fusioni di nuclei sempre più pesanti, con successive contrazioni, fino a quando nel *core* stellare sono presenti solo nuclei nella regione di massa del ^{56}Fe , caratterizzati dalle più elevate energie di legame nucleare. In questo stadio la stella è costituita da un *core* centrale di Fe o Ni circondato da gusci di elementi di massa decrescente procedendo verso la superficie stellare, nel quale non sono possibili reazioni di fusione nucleare perché energeticamente sfavorevoli.

In queste condizioni la pressione gravitazionale non viene più ostacolata dall'energia termica dei nuclei, e inizia la contrazione del *core*. Il processo si arresta temporaneamente quando la pressione di degenerazione del gas di elettroni, proporzionale alla densità, equilibra la pressione gravitazionale. Durante questo periodo di arresto della contrazione, nel guscio più vicino al *core* avvengono reazioni di fusione del silicio in ferro, contribuendo all'accumulo di materia nella regione centrale e quindi all'aumento della densità.

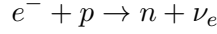
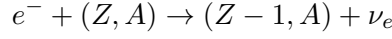
Quando il *core* raggiunge il limite di massa di Chandrasekar ($M_{\text{core}} = 1.4 M_{\odot}$) la pressione gravitazionale prevale sulla pressione di degenerazione; in un intervallo di tempo inferiore al secondo il *core* collassa, favorito dai processi di fotodissociazione e di cattura elettronica.

La fotodissociazione consiste nella scissione di nuclei pesanti dovuta ai fotoni presenti nel *core*; due esempi caratteristici di reazioni, con la relativa energia liberata E , sono:



La cattura elettronica viene indotta su nuclei o su protoni liberi; vengono prodotti neutrini che, essendo immersi in un mezzo con densità elevata, interagiscono con la materia

tramite i processi di scattering su nucleoni liberi, nuclei o elettroni. Le interazioni impediscono ai neutrini di fuggire dal *core* prima che il collasso sia completato [2].



A $\rho \sim \rho_{nuc}$ i nuclei fondono in un gas degenere di protoni e neutroni interagenti, che oppone una forte resistenza ad un'ulteriore compressione. L'accumulo di materia procede fino al raggiungimento della densità critica $\rho_{crit} \sim 2\rho_{nuc}$: a quel punto il *core* rimbalza verso l'esterno, generando un'onda d'urto supersonica. L'esplosione stellare viene denominata *supernova*. Vengono scagliati nello spazio interstellare a velocità $\sim 0.3 c$ sia una parte di ^{56}Fe presente nel *core*, sia gli elementi leggeri presenti negli involucri più esterni della stella: è l'origine di una nebulosa. I neutrini e gli antineutrini prodotti dalle catture elettroniche, che erano precedentemente intrappolati nel *core*, fuoriescono rilasciando complessivamente un quantitativo di energia dell'ordine dei 10^{56} MeV; una minore percentuale di energia viene rilasciata sotto forma di radiazione elettromagnetica.

I resti del *core* collassato danno origine ad una protostella di neutroni di raggio $r \sim 50$ km. Durante il minuto successivo alla nascita, essa è estremamente calda ($T \sim 10^{11} \text{ K} \sim 10^5 T_{\odot}$) e opaca ai neutrini. Durante il primo migliaio di anni il meccanismo fondamentale del raffreddamento consiste nell'emissione di neutrini; al termine di questo periodo, la temperatura interna è nell'ordine del miliardo di K. Le principali reazioni di raffreddamento sono il decadimento β^- del neutrone e la cattura elettronica su protoni liberi [20]:



Nei successivi diecimila anni la temperatura raggiunge valori nell'ordine del 10^8 K ; le sezioni d'urto delle due reazioni precedenti diminuiscono, e il processo di emissione di neutrini passa in secondo piano in favore dell'emissione di radiazione elettromagnetica proveniente dalla crosta esterna.

1.3 Struttura interna

Lo studio della struttura interna di una stella di neutroni rappresenta un problema fisico complesso e tuttora non completamente risolto. All'aumentare della profondità la densità della materia varia complessivamente di dieci o undici ordini di grandezza: ne consegue che non esiste un modello unico che descriva globalmente le caratteristiche della materia stellare, ma sono necessari differenti modelli adatti ai vari range di densità [3]. In figura 1.3 viene illustrata la struttura di una stella di neutroni, specificando le densità e le profondità caratteristiche delle varie regioni.

La struttura interna di una stella di neutroni è suddivisibile in cinque strati di densità crescente dall'esterno verso l'interno: l'*atmosfera*, la *crosta esterna* (o *outer crust*), la *crosta interna* (o *inner crust*), l'*outer core* e l'*inner core* [3].

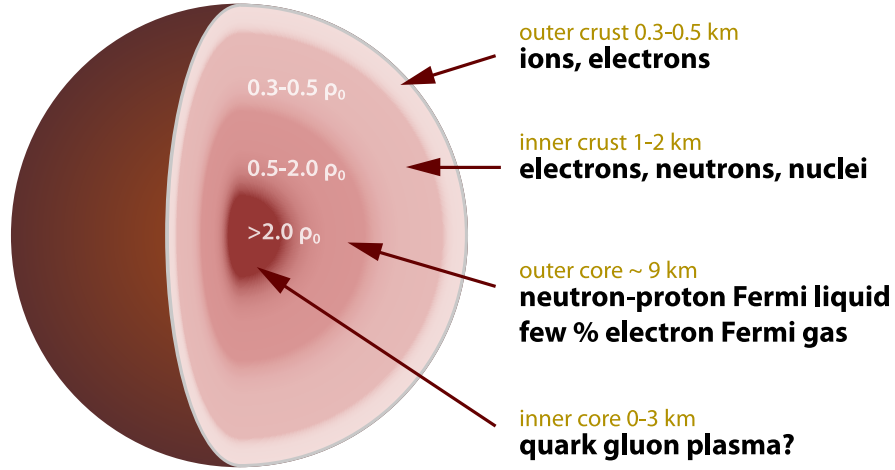


Figura 1.3: Illustrazione della struttura di una stella di neutroni. Nella parte destra dell'immagine sono riportate per ogni regione le estensioni spaziali e le densità (in unità della densità della materia nucleare ρ_0) [28].

L'*atmosfera* è la zona più esterna della stella. Lo spessore varia da una decina di centimetri in una stella calda ($T_s \sim 3 \cdot 10^6$ K)¹ a pochi millimetri in una stella fredda ($T_s \sim 3 \cdot 10^5$ K). La composizione atmosferica è incerta: le ipotesi più accreditate prevedono la presenza di elementi leggeri, come H, He e C [26], o nella regione di massa del ferro [27]. La radiazione termica viene emessa da questa regione: lo spettro energetico contiene informazioni sui parametri fondamentali dell'atmosfera, come la temperatura, la composizione chimica e l'intensità dei campi magnetici [20].

La *crosta esterna* si estende per sette ordini di grandezza di densità, da un minimo $\rho_{ion} \sim 10^4$ g cm⁻³ a un massimo $\rho_{drip} \sim 4.3 \cdot 10^{11}$ g cm⁻³. Questa regione, estesa per qualche centinaio di metri, ha inizio quando gli elettroni sono sufficientemente energetici da vincere l'interazione elettrostatica che li vincola ai nuclei; questi ultimi, diventati ioni positivi, si posizionano grazie all'interazione elettrostatica ai vertici di un reticolo rigido. La crosta esterna, è quindi costituita da nuclei pesanti disposti ai vertici di un reticolo cubico stabile a corpo centrato (*body-centered cubic*), immersi in un gas relativistico di elettroni degeneri; i nuclei sono più ricchi di neutroni quanto più la materia è densa. Il bilancio energetico e lo studio della composizione della crosta esterna rappresentano gli argomenti principali di questo elaborato, e vengono presentati in dettaglio nel capitolo successivo.

A densità comprese tra $\rho = \rho_{drip}$ e $\rho \sim 0.5 \rho_{nuc}$ è situata la *crosta interna*. Estesa per circa un chilometro, è caratterizzata dalla presenza di un gas di neutroni liberi; a causa dell'elevata densità, infatti, una parte dei neutroni legati ai nuclei diventa sufficientemente energetica per svincolarsi (*dripping* o *sgocciolamento*). La materia nella crosta interna consiste in un gas di elettroni e di neutroni, e in nuclei con abbondanza di neutroni posizionati ai vertici di un reticolo *body-centered cubic*; la frazione di neutroni

¹ T_s indica la temperatura superficiale della stella di neutroni.

liberi risulta proporzionale alla densità.

Al di là della crosta interna i nuclei sono localizzati a distanze sufficientemente brevi da fondersi gli uni con gli altri. L'*outer core* è costituito da un plasma di neutroni, protoni, elettroni e muoni¹, che si estende nel range di densità $0.5 \rho_{nuc} \lesssim \rho \lesssim 2 \rho_{nuc}$. I muoni rappresentano una bassa percentuale della materia e vengono prodotti dalla reazione di decadimento del neutrone $n \rightarrow p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, permessa in questo range di densità [3]. I leptoni formano un gas di Fermi ideale, mentre i protoni e i neutroni interagiscono per via dell'interazione nucleare forte.

L'*inner core* occupa la regione centrale di stelle di neutroni massive; si differenzia dall'*outer core* per la presenza di particelle strane o di stati esotici della materia. Non esiste nelle stelle di neutroni leggere, nelle quali l'*outer core* si estende fino al centro, ed è caratterizzato da valori di densità estremamente elevati ($2 \rho_{nuc} \lesssim \rho \lesssim (10 - 15) \rho_{nuc}$) [3]. Numerosi modelli teorici avanzano ipotesi sulle tipologie di particelle presenti; tra le varie possibilità, alcuni modelli prevedono l'esistenza di un gas *npe* con una frazione di iperoni Λ o Σ^- , oppure di un gas di elettroni e di quark u , d , s deconfinati [20]. Il deconfinamento dei quark non è stato tuttora osservato negli esperimenti di fisica delle alte energie; perché questo stato esotico della materia possa realizzarsi è necessario che i nucleoni siano costretti in volumi inferiori delle proprie dimensioni, analogamente a quanto avviene per i nuclei nella crosta interna: i quark di un barione sarebbero allora in grado di mescolarsi ai quark dei barioni vicini, creando un plasma di quark interagenti, ma non legati.

¹Si parla generalmente di plasma *npeμ*.

Capitolo 2

Composizione della crosta esterna in assenza di campo magnetico

Per studiare la composizione della crosta esterna e le funzioni termodinamiche ad essa correlate è necessaria un'analisi dei costituenti da un punto di vista energetico [29] [30].

2.1 Bilancio energetico della crosta esterna

Le ipotesi fondamentali sulla crosta esterna consistono nell'equilibrio idrostatico, elettrostatico e termico del sistema. Una condizione necessaria per l'equilibrio idrostatico è data dalla continuità della pressione in ogni punto del sistema, mentre l'ipotesi di temperatura costante soddisfa l'equilibrio termico.

Nella seguente formulazione si assume che, ad una fissata pressione, il reticolo sia costituito da celle *body-centered cubic* identiche, in modo tale da potersi focalizzare sull'analisi di un singolo nucleo e del corrispondente *background* elettronico circostante.

Dato un nucleo di numero atomico Z e numero di massa A e dato il volume V della cella, allora $n = A/V$ indica la densità barionica, ovvero il numero di nucleoni per unità di volume. La neutralità di carica del sistema è resa possibile dalla presenza del gas elettronico: all'interno di ogni cella devono trovarsi Z protoni del nucleo e Z elettroni del gas. Indicando con n_e la densità elettronica, deve valere:

$$n = \frac{Z}{A} n_e \quad (2.1)$$

Preliminarmente all'analisi energetica si può determinare la densità ρ_{ion} corrispondente all'inizio della crosta esterna; a partire da questo valore di densità lo svincolamento degli elettroni dai nuclei, con conseguente formazione di un gas elettronico, è energeticamente favorito rispetto alla configurazione con elettroni legati. Indicando con B_e l'energia di ionizzazione completa di un nucleo con numero atomico Z [31] e con U l'energia cinetica media del gas di elettroni, la ionizzazione avviene a partire dal valore del momento elettronico p_{ion} (o equivalentemente a partire dalla densità elettronica $n_{e\ ion}$) tale per cui si ha¹:

¹A partire da questo capitolo si è scelto di porre $c \equiv 1$ e $\hbar \equiv 1$.

$$B_e = Z U \quad \Rightarrow \quad \alpha_{ion} Z^{2.37} = \frac{3}{5} \frac{p_{ion}^2}{2m_e} Z \quad \alpha_{ion} = 1.44 \cdot 10^{-5} \text{ MeV}$$

$$p_{ion} = \sqrt{\frac{10}{3} m_e \alpha_{ion} Z^{1.37}} \sim 0.046 \text{ MeV} \quad \Rightarrow \quad n_{e \text{ ion}} \sim 4.2 \cdot 10^{-13} \text{ fm}^{-3}$$

Si può iniziare ora l'analisi dei costituenti. L'energia del sistema per nucleone $\varepsilon(A, Z; n)$ è data dalla somma di tre contributi: l'energia dei nuclei ε_n , l'energia del gas elettronico ε_e , l'energia reticolare ε_l :

$$\varepsilon(A, Z; n) = \varepsilon_n(A, Z) + \varepsilon_e(A, Z; n) + \varepsilon_l(A, Z; n)$$

L'energia fornita da un nucleo al sistema è data dalla massa nucleare:

$$\varepsilon_n(A, Z) = \frac{M(A, Z)}{A} = \frac{m_n(A - Z) + m_p Z - B_{tot}(A, Z)}{A} \quad (2.2)$$

dove $M(A, Z)$ è la massa del nucleo, $m_p = 938.272 \text{ MeV}$ e $m_n = 939.565 \text{ MeV}$ le masse rispettivamente del protone e del neutrone e $B_{tot}(A, Z)$ l'energia di legame nucleare totale. B_{tot} rappresenta la quantità di energia necessaria per vincere l'attrazione nucleare forte e svincolare i nucleoni. L'energia di legame per nucleone $B(A, Z) = B_{tot}(A, Z)/A$ segue l'andamento illustrato in figura 2.1; i valori caratteristici si collocano tra i 7 MeV e gli 8 MeV, un milione di volte più elevati dell'energia di ionizzazione elettronica.

Nel range di densità della crosta esterna, gli elettroni si svincolano dagli atomi e costituiscono un gas ideale a temperatura nulla di fermioni liberi, degeneri e relativistici. Il contributo energetico viene descritto dalla statistica di Fermi-Dirac [30]:

$$\varepsilon_e(A, Z; n) = \frac{E_e}{n} = \frac{1}{n} \int_0^{p_{Fe}} \frac{dN}{dp} dp = \frac{1}{n\pi^2} \int_0^{p_{Fe}} p^2 \sqrt{p^2 + m_e^2} dp \quad (2.3)$$

dove E_e , m_e , $p_{Fe} = (3\pi^2 n_e)^{1/3}$ indicano rispettivamente la densità di energia elettronica, la massa dell'elettrone e il momento di Fermi dell'elettrone. L'approssimazione di temperatura nulla è giustificata dal fatto che, alle temperature e alle densità caratteristiche della crosta esterna ($T \sim 10^6 \text{ K}$), l'energia associabile al moto termico degli elettroni $^1 E_k = k_B T \sim 8.6 \cdot 10^{-5} \text{ MeV}$ risulta trascurabile rispetto all'energia media del gas elettronico U :

$$U \gg E_k \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5} \frac{p^2}{2m_e} \gg k_B T \quad \Rightarrow \quad p \gg \sqrt{\frac{10}{3} m_e k_B T} \sim 0.012 \text{ MeV}$$

$$n_e \gg 7.6 \cdot 10^{-15} \text{ fm}^{-3}$$

La densità elettronica alla quale le due energie sono uguali è inferiore di due ordini di grandezza al valore di $n_{e \text{ ion}}$ ricavato in precedenza, giustificando l'approssimazione $T = 0$ per l'intera crosta esterna.

Per elaborare la (2.3), si definiscono il momento di Fermi adimensionale x_F e l'energia di Fermi adimensionale y_F :

¹Con $k_B = 8.62 \cdot 10^{-11} \text{ MeV K}^{-1}$ si indica la costante di Boltzmann.

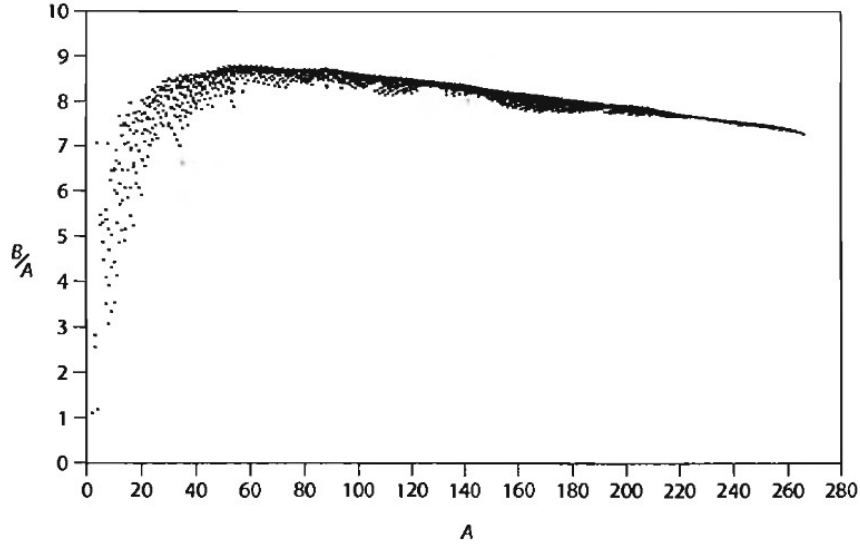


Figura 2.1: Valori sperimentali delle energie di legame per nucleone B/A in funzione del numero di massa A [32]. L'andamento è crescente per i nuclei leggeri, mentre nella regione del ^{56}Fe raggiunge un massimo; si stabilizza infine intorno agli 8 MeV/ A nei nuclei pesanti. La saturazione dell'energia di legame è caratteristica di sistemi legati da un'interazione a corto range.

$$x_F \equiv \frac{p_{Fe}}{m_e} \quad y_F \equiv \frac{E_{Fe}}{m_e} \quad (2.4)$$

L'equazione relativistica energia-momento collega le due grandezze appena definite:

$$E_{Fe}^2 = m_e^2 + p_{Fe}^2 \quad \Rightarrow \quad y_F = \sqrt{1 + x_F^2}$$

La condizione di neutralità di carica (2.1) fornisce una fondamentale relazione tra il momento di Fermi elettronico p_{Fe} e il momento di Fermi barionico¹ p_F :

$$p_{Fe} = (3\pi^2 n_e)^{1/3} = (3\pi^2 n y)^{1/3} \equiv p_F y^{1/3} \quad (2.5)$$

$$p_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

Calcolando analiticamente l'integrale della formula (2.3) si ottiene:

$$\varepsilon_e(A, Z; n) = \frac{m_e^4}{8\pi^2 n} \{x_F y_F (x_F^2 + y_F^2) - \ln(x_F + y_F)\}$$

dove la dipendenza da n è anche contenuta implicitamente nei termini x_F e y_F tramite la (2.5).

A temperatura nulla, grazie all'interazione coulombiana i nuclei sono collocati ai vertici in un reticolo stabile *body-centered cubic*. L'energia di reticolo si ottiene sommando

¹Ovvero il momento di Fermi relativo a protoni o neutroni.

due energie potenziali elettrostatiche: E_{e-e} , dovuta all'interazione elettrone-elettrone, e E_{e-i} , dovuta all'interazione ione-elettrone. Le repulsioni elettrostatiche tra i protoni non vengono conteggiate in questo calcolo, essendo già implicitamente contenute nell'espressione della massa nucleare (2.2). I due contributi possono essere stimati utilizzando l'approssimazione di Wigner-Seitz: anziché considerare la cella primitiva del reticolo *body-centered cubic*, si calcolano le energie all'interno di una cella sferica di raggio r_0 di pari volume [2]. La ragione di questa semplificazione consiste nella maggior facilità di calcolo di E_{e-e} e E_{e-i} in condizioni di simmetria sferica. In figura 2.2 è illustrato l'esempio di approssimazione di Wigner-Seitz nel caso di un reticolo bidimensionale con cella primitiva quadrata.

Ogni cella è elettricamente neutra grazie all'ipotesi (2.1): contiene Z protoni e Z elettroni, questi ultimi distribuiti uniformemente nel volume. Ne consegue che il raggio della cella sferica r_0 viene definito dalla seguente relazione:

$$n_e = \frac{3Z}{4\pi r_0^3} \quad (2.6)$$

Dall'uguaglianza tra i volumi della cella primitiva del reticolo *body-centered cubic* e della cella sferica associata si ricava la relazione tra r_0 e il passo reticolare a :

$$\frac{4}{3}\pi r_0^3 = V_{\text{sfera}} = V_{\text{bcc}} = \frac{a^3}{2} \Rightarrow a = 2r_0 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}$$

Indicando con q la carica elettronica contenuta all'interno della sfera e con e la carica dell'elettrone, e assumendo che i nuclei siano puntiformi rispetto al passo reticolare, i due contributi energetici e l'energia di reticolo E_l valgono:

$$\begin{aligned} E_{e-e} &= \int_0^{r_0} \frac{q(r)}{r} dq(r) = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0} & q(r) &= -Ze \frac{r^3}{r_0^3} \\ E_{e-i} &= Ze \int_0^{r_0} \frac{dq(r)}{r} = -\frac{3}{2} \frac{Z^2 e^2}{r_0} \\ \varepsilon_l &= \frac{E_l}{A} = \frac{E_{e-e} + E_{e-i}}{A} = -\frac{9}{10} \frac{Z^2 e^2}{A r_0} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Un calcolo esatto dell'energia reticolare per il reticolo *body-centered cubic* fornisce un risultato identico all'espressione precedente, ad eccezione del coefficiente moltiplicativo $\alpha_{\text{bcc}} = 1.79186$ che va a sostituire $9/10$ [33]. Per le altre tipologie di reticolo cubico stabile, come il *face-centered cubic*, le dipendenze dell'energia da Z e da r_0 sono le stesse di quelle presenti nella (2.7), mentre opportuni coefficienti rimpiazzano $9/10$. Nessuno di questi coefficienti risulta essere inferiore a α_{bcc} : da un punto di vista energetico il reticolo *body-centered cubic* è favorito per il sistema, poiché minimizza l'energia di reticolo a parità di Z , A e a . Utilizzando la (2.6) ed esprimendo n in funzione del momento di Fermi barionico con la (2.5) si può rielaborare la (2.7) ¹.

$$r_0^{-1} = \left(\frac{4n_e}{9\pi A}\right)^{1/3} \Rightarrow \varepsilon_l(A, Z; p_F) = -C_l \frac{Z^2}{A^{4/3}} p_F \quad C_l = 3.40665 \cdot 10^{-3}$$

¹Sostituendo α_{bcc} a $9/10$.

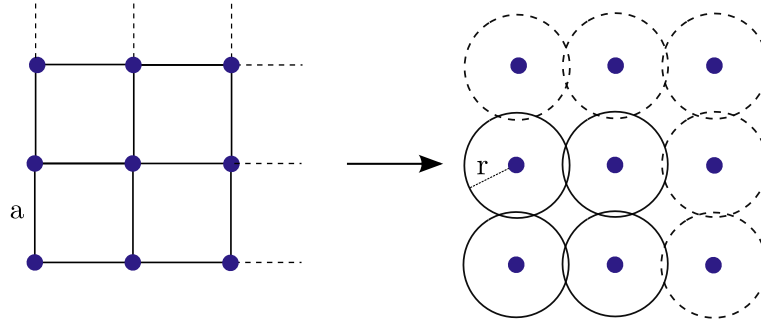


Figura 2.2: Illustrazione dell'approssimazione di Wigner Seitz per un reticolo bidimensionale. Le celle quadrate di passo a vengono sostituite da celle circolari di raggio r , determinato dalla condizione di uguaglianza dei volumi.

Ottenute le espressioni dei tre contributi in funzione della terna $(A, Z; n)$, la forma completa dell'energia del sistema per nucleone è:

$$\varepsilon(A, Z; n) = m_p \frac{Z}{A} + m_n \frac{A-Z}{A} + \frac{B(A, Z)}{A} + \frac{m_e^4}{8\pi^2 n} \{x_F y_F (x_F^2 + y_F^2) - \ln(x_F + y_F)\} - C_l \frac{Z^2}{A^{4/3}} p_F(n)$$

Il principale ostacolo alla determinazione dell'energia è rappresentato dalla scarsa conoscenza sperimentale delle masse dei nuclei lontani dalla valle di β -stabilità ed in particolare nelle vicinanze della *drip line* neutronica, rendendo così necessaria un'estrapolazione delle masse in questa zona utilizzando modelli nucleari [30].

A partire dalla precedente espressione dell'energia del sistema per nucleone, è possibile determinare la pressione. I nuclei non contribuiscono perché $\varepsilon_n(A, Z)$ non dipende dalla densità barionica né dal volume, mentre i termini elettronici e reticolari sono:

$$P_e = -\left(\frac{\partial E_e}{\partial V}\right)_Z = \frac{x_F}{3} \left(\frac{\partial \epsilon_e}{\partial x_F}\right) - \epsilon_e = \frac{m_e^4}{3\pi^2} \left(x_F^3 y_F - \frac{3}{8} [x_F y_F (x_F^2 + y_F^2) - \ln(x_F + y_F)]\right) \quad (2.8)$$

$$P_l = -\left(\frac{\partial E_l}{\partial V}\right)_{(Z,A)} = -\frac{n}{3} C_l \frac{Z^2}{A^{4/3}} p_F$$

La pressione totale del sistema dipende dalla terna (A, Z, n) , analogamente all'energia del sistema per particella:

$$P(A, Z; n) = \frac{m_e^4}{3\pi^2} \left(x_F^3 y_F - \frac{3}{8} [x_F y_F (x_F^2 + y_F^2) - \ln(x_F + y_F)]\right) - \frac{n}{3} C_l \frac{Z^2}{A^{4/3}} p_F \quad (2.9)$$

Per ricavare la sequenza dei nuclei presenti nella crosta esterna, in prima analisi si potrebbe decidere di fissare una serie di valori di densità del mezzo n e ricercare la coppia di valori (A, Z) che minimizzano l'energia per particella $\varepsilon(A, Z; n)$. Questa scelta ha il difetto di non garantire la continuità della pressione in corrispondenza della transizione

da una specie nucleare ad un'altra, in contrasto con l'ipotesi iniziale di equilibrio idrostatico della crosta.

Si sceglie quindi di utilizzare la pressione P come variabile indipendente del sistema, anziché la densità. In un sistema a pressione e temperatura costanti, la grandezza termodinamica da minimizzare per ricavare il *ground state* è l'energia libera di Gibbs per particella g . Nel caso di un sistema termodinamico costituito da n sostanze, si ha:

$$g = \sum_{i=1}^n Y_i \mu_i \quad \mu_i = \frac{\partial(\varepsilon/n)}{\partial Y_i} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_i} \quad (2.10)$$

dove μ_i e $Y_i = n_i/n$ rappresentano rispettivamente il potenziale chimico e la concentrazione dell' i -esima sostanza.

Il potenziale chimico μ_i rappresenta la variazione infinitesima di densità di energia del sistema sotto l'effetto di una variazione infinitesima della densità della sostanza i -esima a temperatura, volume, entropia costanti. Le trasformazioni spontanee lasciano invariata l'energia di Gibbs e sono quindi caratterizzate dalla condizione $\delta g = 0$, mentre per le trasformazioni irreversibili vale $\delta g > 0$.

Nel caso di temperatura nulla, l'energia libera di Gibbs è collegata all'energia del sistema E attraverso la trasformata di Legendre rispetto al volume V :

$$G = E + PV \quad g(A, Z; P) = \frac{G(A, Z; P)}{A}$$

$$g(A, Z; P) = \varepsilon(A, Z; n(P)) + \frac{P}{n(P)} = \frac{M(A, Z)}{A} + \frac{Z}{A} \mu_e(P) - \frac{4}{3} C_l \frac{Z^2}{A^{4/3}} p_F(P) \quad (2.11)$$

dove $E_{Fe} = \mu_e(P) = \sqrt{p_{Fe}^2 + m_e^2}$ indica l'energia di Fermi elettronica, coincidente, a temperatura nulla, con il potenziale chimico elettronico. Considerando gli elettroni come ultrarelativistici l'energia di Fermi coincide con il momento di Fermi, mentre la massa elettronica gioca un ruolo trascurabile:

$$y_F = \sqrt{1 + \left(\frac{p_{Fe}}{m_e}\right)^2} \rightarrow x_F$$

Nella (2.11) la dipendenza di g dalla pressione è contenuta in p_F ; esplicitando la (2.9) e definendo le quantità x e y si ottiene:

$$x = A^{1/3} \quad y = Z/A \quad p_F = \left(\frac{36\pi^2 P}{3y^{4/3} - 4C_l x^2 y^2} \right)^{1/4}$$

$$g(x, y; P) = m_p y + (1 - y) m_n - B(x, y) + y \mu_e(P) - \frac{4}{3} C_l x^2 y^2 p_F(P) \quad (2.12)$$

Al crescere della pressione, il rapporto Z/A dei nuclei all'equilibrio diminuisce a causa della cattura elettronica, e i neutroni risultano sempre meno legati ai nuclei a causa dell'asimmetria protoni-neutroni. Oltre la densità critica ρ_{drip} , ovvero la densità corrispondente alla *neutron drip line*, i nuclei non sono in grado di legare parte dei neutroni, i quali si svincolano per emissione diretta costituendo un gas di neutroni liberi.

$$A(Z, N) \rightarrow A(Z, N - 1) + n$$

Dalla (2.10) si ottiene che l'emissione è spontanea alla pressione P_{drip} se viene verificata la condizione:

$$g(P_{drip}) = m_n \quad (2.13)$$

Oltre il valore P_{drip} termina la crosta esterna: l'emissione di neutroni da parte dei nuclei è energeticamente conveniente, e quindi spontanea. La determinazione della densità o della pressione corrispondenti alla *neutron drip line* è fondamentale: al di là di essa ha inizio la crosta interna, e i bilanci energetici della crosta esterna cessano di validità a causa della presenza del gas di neutroni liberi.

2.2 Determinazione della sequenza di nuclei

Una volta ottenuta l'espressione dell'energia libera di Gibbs $g(A, Z; P)$ si può procedere con la determinazione della sequenza dei nuclei nel reticolo. Viene scelta una successione di valori di pressione P , variabile indipendente del sistema, e per ognuno di essi si ricavano le incognite Z e A (o equivalentemente $x = A^{1/3}$ e $y = Z/A$) che minimizzano l'energia di Gibbs (2.12).

Per conoscere il valore di $g(A, Z; P)$ occorre scegliere un modello per le masse nucleari che descriva l'energia di legame per nucleone $B(A, Z)$; a seconda della scelta, le composizioni presentano le stesse caratteristiche generali, nonostante i nuclei presenti possano essere differenti. Nel corso dell'elaborato verranno utilizzati il modello a goccia liquida [32] e il modello di Duflo-Zuker [34].

Anche se ad oggi è ritenuto superato per descrivere le energie di legame¹ per via della bassa accuratezza, il modello a goccia liquida viene utilizzato per ottenere un'idea generale sulle caratteristiche della sequenza dei nuclei nella crosta esterna e sul meccanismo fisico che la determina. Una forma più affidabile della composizione sarà poi determinata con il modello di Duflo-Zuker, considerato uno tra i più accurati modelli esistenti per la descrizione delle masse nucleari.

2.2.1 Modello a goccia liquida

Il modello a goccia liquida, o *liquid drop model* [32], rappresenta storicamente uno dei primi tentativi di riprodurre parte delle proprietà dei nuclei, tra le quali le energie di legame, le regioni di stabilità rispetto ai decadimenti β e l'energia sviluppata nelle fissioni nucleari. L'idea di considerare il nucleo come una goccia di liquido nasce dalle proprietà di saturazione dell'energia di legame e dall'incompressibilità della materia nucleare.

Se nel nucleo l'energia di legame totale derivasse da un'interazione attrattiva tra tutte le possibili coppie di nucleoni allora B_{tot} , al variare di A , crescerebbe come il numero di

¹Non include infatti gli effetti di shell.

coppie $A(A-1)/2$, e quindi $B/A \sim A$. Sperimentalmente, ad esclusione dei nuclei leggeri, si riscontra che B/A satura a (8 ± 1) MeV; l'osservazione empirica si può comprendere assumendo che la forza nucleare abbia un range limitato, e che ogni nucleone interagisca soltanto con i nucleoni immediatamente vicini. Queste considerazioni permettono un paragone diretto con la goccia di liquido, nella quale l'energia di vaporizzazione dipende linearmente dalla massa, e si osserva una saturazione delle forze chimiche di legame delle molecole.

La proprietà di incompressibilità della materia nucleare deriva dai risultati sperimentali di misura dei raggi nucleari, ed in particolare dalla relazione empirica che collega il raggio del nucleo r al numero di massa A :

$$r = r_n A^{1/3} \quad r_n \approx 1.3 \text{ fm}$$

$$\rho_{nuc} \sim \frac{A m_n}{V} = \frac{3m_n}{4\pi r_n^3} \sim 2 \cdot 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$$

La densità della materia nucleare ρ_{nuc} è, almeno in prima approssimazione, indipendente dal numero di massa o dal numero atomico: il nucleo è quindi incompressibile, analogamente alla materia liquida che costituisce una goccia.

La formula semiempirica di Bethe-Weizsäcker descrive l'energia di legame di un nucleo a partire dalle caratteristiche evidenziate nel modello a goccia, utilizzando i seguenti quattro termini¹[32]:

$$B_{tot}(A, Z) = -a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

a_v , a_s , a_c e a_a sono parametri ottenibili fittando la formula di Bethe-Weizsäcker ai valori misurati di masse sperimentali, ad esempio a quelli resi disponibili online dalla collaborazione Atomic Mass Data Center [35]. Sono stati eseguiti due fit separati, dai quali poi sono stati ricavati due set di coefficienti, riportati in tabella 2.1: il primo con i nuclei $Z > 7$ (*all*) e il secondo quelli con $20 < Z < 70$ (*center*). I quattro termini della formula hanno significati fisici ben precisi:

1. L'energia di volume rappresenta il contributo principale, legante, all'energia di legame. Riflette la saturazione dell'energia di legame per la materia nucleare infinita e simmetrica². I successivi quattro termini sono correzioni positive all'energia di volume.

$$E_{vol} = -a_v A$$

¹Esistono altri termini nella descrizione di $B(A, Z)$ secondo il modello a goccia liquida, ad esempio il termine di *pairing*. Tuttavia non vengono inseriti nella formula in quanto lo studio della crosta esterna utilizzando questo modello ha la sola funzione di analisi preliminare del sistema, utile per la comprensione delle caratteristiche generali.

²Si definisce materia nucleare simmetrica un sistema infinito con egual numero di protoni e neutroni e con assenza di campo coulombiano. Valgono quindi le condizioni $E_{surf} = 0$, $E_{coul} = 0$, $E_{asym} = 0$.

Tabella 2.1: Coefficienti dei termini della formula semiempirica di Bethe-Weizsäcker, utilizzando i due fit *all* e *center*, espressi in MeV.

Fit	a_v	a_s	a_c	a_a	rms
All	15.558	17.009	0.704	23.080	3.2
Center	14.934	15.364	0.651	21.022	2.8

2. I nucleoni più esterni, o superficiali, contribuiscono in misura minore all'energia di legame rispetto a quelli interni, poichè interagiscono con un numero minore di nucleoni. Per tenere conto di questo aspetto, viene inserita una correzione positiva proporzionale alla superficie del nucleo, chiamata energia superficiale.

$$E_{surf} = a_s A^{2/3}$$

3. L'interazione elettrostatica repulsiva tra i protoni tende a rendere instabile il nucleo e a diminuire l'energia di legame. La correzione elettrostatica del nucleo può essere ben approssimata dall'espressione dell'energia elettrostatica di una sfera con carica uniformemente distribuita.

$$U = \frac{3}{5} \frac{Ze^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0^2} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \sim 0.7 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \text{ MeV}$$

$$E_{coul} = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

4. I tre termini elencati finora non sono sufficienti a dipingere una descrizione realistica delle energie di legame in funzione di Z e A , dato che nuclei stabili sarebbero composti esclusivamente da neutroni. Empiricamente si ricava che i nuclei con $N \approx Z$ sono più stabili rispetto a quelli con abbondanza di neutroni su protoni; questa caratteristica è particolarmente marcata per nuclei leggeri. Per risolvere l'incongruenza è necessario inserire *ad hoc* il termine di asimmetria, giustificabile attraverso una trattazione quantistica del nucleo come gas di fermioni liberi, che rispetta dunque il principio di esclusione di Pauli.

$$E_{asym} = a_a \frac{(N - Z)^2}{N + Z} = a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

Scrivendo l'energia di legame per nucleone B e l'energia di Gibbs per nucleone g in termini di Z e A oppure di x e y si ottiene:

$$B(A, Z) = \frac{B_{tot}(A, Z)}{A} = -a_v + a_s \frac{1}{A^{1/3}} + a_c \frac{Z^2}{A^{4/3}} + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A^2}$$

$$B(x, y) = -a_v + \frac{a_s}{x} + a_c x^2 y^2 + a_a (1 - 2y)^2$$

$$g(x, y; P) = m_p y + m_n(1 - y) - a_v + \frac{a_s}{x} + \left(a_c - C_l p_F(P) \right) x^2 y^2 + a_a(1 - 2y)^2 + y^{4/3} p_F(P) \quad (2.14)$$

È utile rinominare i vari termini dell'equazione precedente:

$$\begin{aligned} g_{surf} &= a_s x^{-1} & g_{coul} &= a_c x^2 y^2 & g_{asym} &= a_a(1 - 2y)^2 \\ g_e &= y^{4/3} p_F(P) & g_l &= -C_l x^2 y^2 p_F(P) \end{aligned}$$

Dalla formula (2.14) si può trarre qualche previsione sulle caratteristiche della composizione. Essa è determinata dalla competizione tra i vari termini che costituiscono l'energia di Gibbs, in particolare da g_e , g_{coul} e g_{asym} . Il ruolo centrale viene giocato dal contributo elettronico, che a $P \gtrsim 10^8 \text{ g cm}^{-3}$ aumenta sensibilmente l'energia di Gibbs del sistema; la repulsione elettrostatica, pur essendo indipendente dalla densità o dalla pressione, contribuisce a questo aumento, seppur in misura inferiore. Per arginare la crescita energetica, il sistema tende a diminuire il numero di elettroni presenti, e quindi y , tramite processi di cattura elettronica.

La diminuzione di y non procede fino alla cattura di tutti gli elettroni nella cella a causa dell'innalzamento del termine g_{asym} , associato all'asimmetria $N - Z$. Il sistema si trova in condizioni di equilibrio quando una ulteriore decrescita di y causa un'aumento netto dell'energia di Gibbs del sistema: trascurando in prima approssimazione le variazioni di g dovute agli altri termini, l'aumento di g_{asym} sarebbe maggiore della diminuzione di g_{el} , ovvero $\Delta g = \Delta g_{asym} + \Delta g_e > 0$. Questo significa che ulteriori catture elettroniche non sono realizzabili per il sistema in quanto sfavorevoli dal punto di vista energetico; il ruolo giocato dal termine di asimmetria è fondamentale, in quanto interviene a bloccare il processo di diminuzione della frazione di elettroni.

Infine, il termine di reticolo g_l ha l'effetto di legare il sistema cancellando parte di g_{coul} , con la quale condivide la stessa dipendenza da Z e da A . D'altra parte, a fissato y , il valore di x all'equilibrio viene stabilito dai due comportamenti contrapposti di g_{surf} e g_{coul} , che tendono rispettivamente ad aumentare e a diminuire x .

Le principali caratteristiche delle sequenze di nuclei sono riportate nelle tabelle 2.2 e 2.3, mentre nelle due figure 2.3 e 2.4 sono rappresentati gli andamenti di $Z(P)$ e $N(P)$ per entrambi i fit. I cambi di specie nucleari del reticolo sono numerosi e riportare tutte le pressioni a cui avvengono le transizioni non è particolarmente istruttivo: nelle due tabelle sono state evidenziate le proprietà generali della crosta selezionando una serie di valori di pressione che copra vari ordini di grandezza.

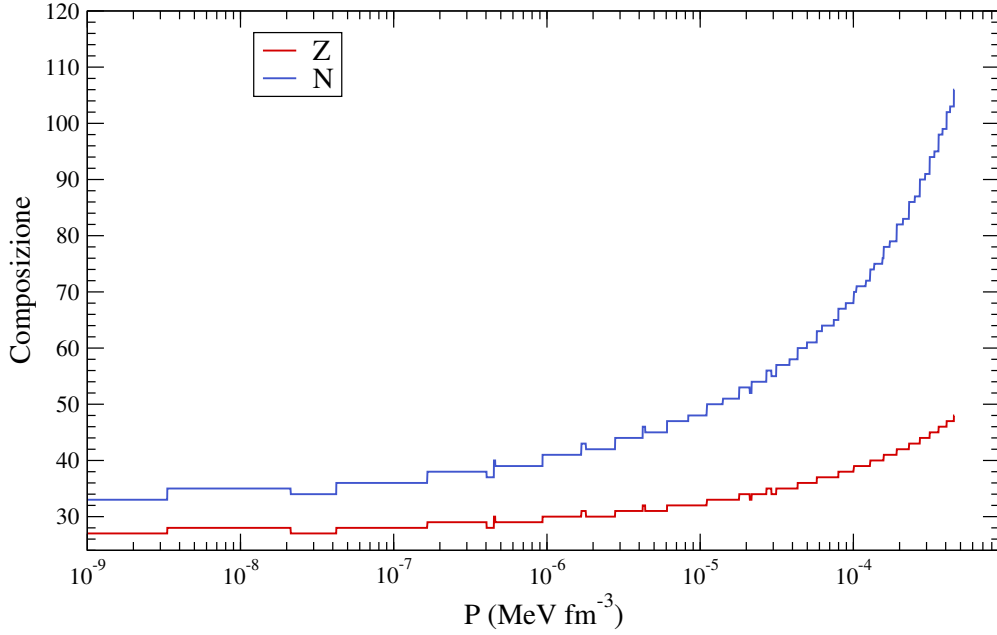


Figura 2.3: Sequenza dei nuclei presenti nella crosta esterna al variare di P in assenza di campo magnetico, utilizzando il modello a goccia liquida e il set di parametri *all*.

Tabella 2.2: Proprietà della crosta esterna a vari valori di pressione, ricavate con modello a goccia liquida e fit *all*.

$P(\text{MeV fm}^{-3})$	Nucleo	Z	N	$\rho (\text{g cm}^{-3})$	y
$1.00 \cdot 10^{-10}$	^{60}Co	27	33	$2.79 \cdot 10^6$	0.450
$5.00 \cdot 10^{-9}$	^{63}Ni	28	35	$5.32 \cdot 10^7$	0.444
$5.00 \cdot 10^{-8}$	^{64}Ni	28	36	$3.03 \cdot 10^8$	0.438
$5.00 \cdot 10^{-7}$	^{68}Cu	29	39	$1.76 \cdot 10^9$	0.426
$2.50 \cdot 10^{-6}$	^{72}Zn	30	42	$6.03 \cdot 10^9$	0.417
$6.50 \cdot 10^{-6}$	^{79}Ge	32	47	$1.27 \cdot 10^{10}$	0.405
$2.00 \cdot 10^{-5}$	^{87}Se	34	53	$3.06 \cdot 10^{10}$	0.391
$5.00 \cdot 10^{-5}$	^{97}Kr	36	61	$6.41 \cdot 10^{10}$	0.371
$7.00 \cdot 10^{-5}$	^{101}Rb	37	64	$8.36 \cdot 10^{10}$	0.366
$9.00 \cdot 10^{-5}$	^{106}Sr	38	68	$1.03 \cdot 10^{11}$	0.358
$1.50 \cdot 10^{-4}$	^{115}Zr	40	75	$1.56 \cdot 10^{11}$	0.348
$3.00 \cdot 10^{-4}$	^{135}Ru	44	91	$2.81 \cdot 10^{11}$	0.326
$4.00 \cdot 10^{-4}$	^{145}Pd	46	99	$3.59 \cdot 10^{11}$	0.317
$4.55 \cdot 10^{-4}$	^{154}Cd	48	106	$4.03 \cdot 10^{11}$	0.311

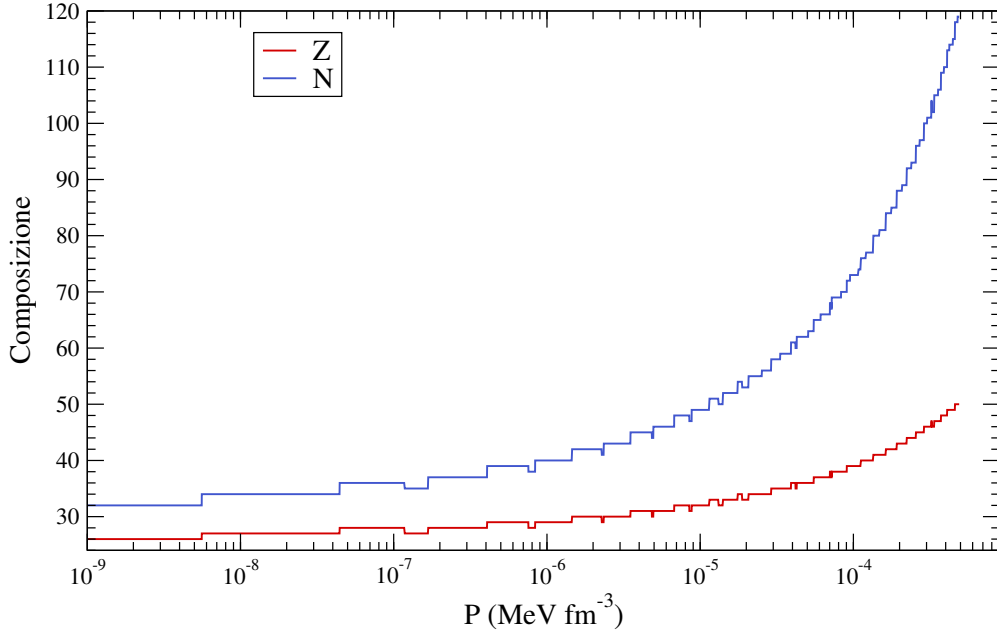


Figura 2.4: Sequenza dei nuclei presenti nella crosta esterna al variare della pressione, in assenza di campo magnetico, utilizzando il modello a goccia liquida con set *center*.

Tabella 2.3: Proprietà della crosta esterna a vari valori di pressione, ricavate con modello a goccia liquida e fit *center*.

$P(\text{MeV fm}^{-3})$	Nucleo	Z	N	$\rho (\text{g cm}^{-3})$	y
$1.00 \cdot 10^{-10}$	^{60}Co	27	33	$2.79 \cdot 10^6$	0.450
$5.00 \cdot 10^{-9}$	^{58}Fe	26	32	$5.26 \cdot 10^7$	0.448
$5.00 \cdot 10^{-8}$	^{64}Ni	28	36	$3.03 \cdot 10^8$	0.438
$5.00 \cdot 10^{-7}$	^{68}Cu	29	39	$1.76 \cdot 10^9$	0.426
$2.50 \cdot 10^{-6}$	^{73}Zn	30	43	$6.09 \cdot 10^9$	0.411
$6.50 \cdot 10^{-6}$	^{77}Ga	31	46	$1.27 \cdot 10^{10}$	0.403
$2.00 \cdot 10^{-5}$	^{86}As	33	53	$3.12 \cdot 10^{10}$	0.384
$5.00 \cdot 10^{-5}$	^{98}Kr	36	62	$6.47 \cdot 10^{10}$	0.367
$7.00 \cdot 10^{-5}$	^{103}Rb	37	66	$8.53 \cdot 10^{10}$	0.358
$9.00 \cdot 10^{-5}$	^{108}Sr	38	70	$1.05 \cdot 10^{11}$	0.352
$1.50 \cdot 10^{-4}$	^{122}Nb	41	81	$1.62 \cdot 10^{11}$	0.336
$3.00 \cdot 10^{-4}$	^{146}Pd	46	100	$2.91 \cdot 10^{11}$	0.315
$4.00 \cdot 10^{-4}$	^{158}Cd	48	110	$3.76 \cdot 10^{11}$	0.308
$4.90 \cdot 10^{-4}$	^{169}Sn	50	119	$4.50 \cdot 10^{11}$	0.296

Gli andamenti di Z e N riflettono le previsioni accennate precedentemente, ed in particolare mostrano la presenza di nuclei con abbondanza di neutroni su protoni per pressioni alte e la trascurabile influenza del gas di elettroni per pressioni basse.

Le due composizioni non presentano significative differenze entro $P \sim 10^{-5} \text{ MeV fm}^{-3}$, per poi dividersi più nettamente a pressioni maggiori. Questa separazione è sempre più accentuata all'avvicinarsi della *neutron drip line*: come si vede dalla figura 2.5 l'asimmetria $N - Z$ è maggiore con il fit *center*, per il quale si raggiungono nuclei più esotici nelle vicinanze della *neutron drip line*. La ragione di questa differenza tra le composizioni è contenuta nei valori dei coefficienti dei fit, ed in particolare in quelli di asimmetria, per i quali la variazione è più alta che per gli altri tre coefficienti: $a_{asym}^a - a_{asym}^c \sim 2.06 \text{ MeV}$ ¹. A P e y fissati, e dato che $a_{asym}^a > a_{asym}^c$, si ha $g_e^a = g_e^c$ e $g_{asym}^a > g_{asym}^c$; il set *center* consente al sistema di raggiungere nuclei più ricchi di neutroni rispetto al set *all*, poiché diminuendo y il contributo elettronico viene frenato in misura minore dal termine di asimmetria. Per ognuno dei due casi la presenza del gas di elettroni dona stabilità a nuclei molto asimmetrici che, in condizioni di pressione nulla, sarebbero instabili per decadimento β^- o per emissione di neutroni.

La figura 2.6 rappresenta gli andamenti dei termini che costituiscono l'energia di Gibbs del sistema con fit *all*. g_{coul} , g_{surf} e g_l non si discostano mai oltre il MeV rispetto al valore a $P \sim 0$, mentre g_e e g_{asym} deviano rispettivamente di 3 MeV e 6 MeV. Queste variazioni sono coerenti con il fatto che l'asimmetria dei nuclei e il gas elettronico sono le principali responsabili dell'abbondanza di neutroni.

Confrontando g_l con g_{coul} a differenti valori di pressione, si nota come il contributo di reticolo, proporzionale a p_F e quindi a P , risulti trascurabile per la maggior parte della crosta esterna:

$$\left| \frac{g_l(p_F(P))}{g_{coul}} \right| = \frac{C_l p_F(P)}{a_c} \sim 5 \cdot 10^{-3} p_F(P) \text{ MeV}^{-1}$$

Si può effettuare una stima di esempio, considerando due momenti di Fermi barionici p_{F1} e $p_{F \text{ drip}}$ associati ai valori di pressione $P_1 = 10^{-7} \text{ MeV fm}^{-3}$ e $P_{\text{drip}} \sim 4.5 \cdot 10^{-4} \text{ MeV fm}^{-3}$:

$$\left| \frac{g_l(p_{F1})}{g_{coul}} \right| \sim 0.02 \quad \left| \frac{g_l(p_{F \text{ drip}})}{g_{coul}} \right| \sim 0.18$$

Per completezza, nella figura 2.7 vengono rappresentate le equazioni di stato $P(n)$, esprimibili analiticamente dalla formula (2.11):

$$P = \frac{(3\pi^2 n)^{4/3}}{36\pi^2} \left(y^{4/3} - 4C_l x^2 y^2 \right) \quad (2.15)$$

I due andamenti non presentano differenze significative; a parità di n si avrà $P^a \geq P^c$ per via della maggiore asimmetria $N - Z$ dei nuclei con fit *center*, ovvero $y^a \geq y^c$. Il secondo termine della parentesi della (2.2.1) è trascurabile per via del basso valore del coefficiente C_l . Le differenze tra gli andamenti sono comunque poco rilevanti: ad esempio a $n = 5.00 \cdot 10^{-6} \text{ fm}^{-3}$ si ha $\Delta P/P \sim 2.3 \cdot 10^{-2}$, mentre a $n = 1.00 \cdot 10^{-4} \text{ fm}^{-3}$ si ha

¹Le quantità con apice a sono riferite al fit *all*, mentre quelle con apice c al fit *center*.

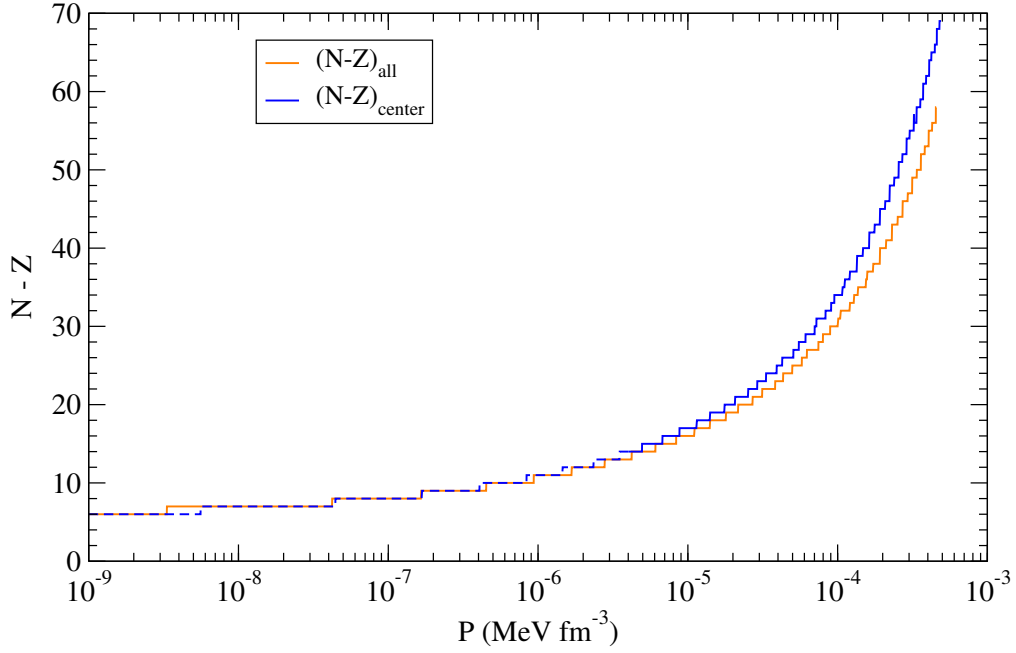


Figura 2.5: Differenza tra neutroni e protoni nei nuclei del reticolo in funzione della pressione del sistema, con modello a goccia liquida.

$$\Delta P/P \sim 3.6 \cdot 10^{-2}.$$

In sintesi, il modello a goccia liquida è in grado di descrivere le principali caratteristiche della crosta esterna nonostante il valore della *rms* nell'ordine dei 3 MeV, come si vede in tabella 2.1. Per conoscere con maggiore affidabilità quali nuclei si dispongano nel reticolo e a quali pressioni avvengano le transizioni nucleari, è necessario fare ricorso ad un modello più accurato per la descrizione delle masse.

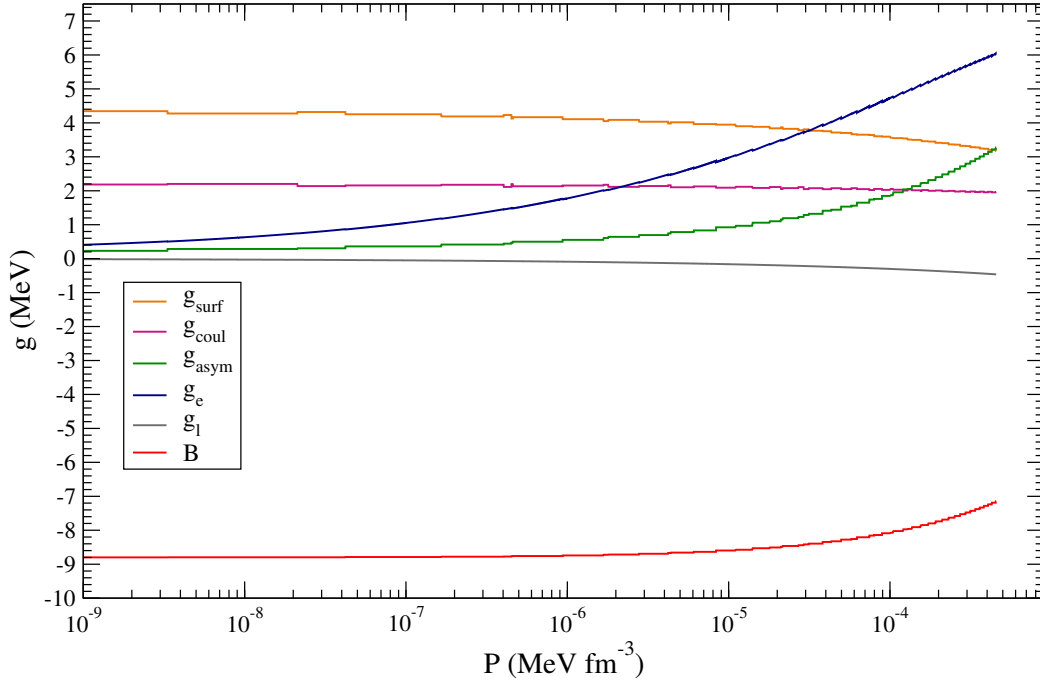


Figura 2.6: Andamento dei principali termini di $g(A, Z; P)$ (2.14) in funzione della pressione con fit *all*.

2.2.2 Modello di Duflo-Zuker

La formula di Duflo e Zuker [34] [36] [37] fu elaborata con l'obiettivo di riprodurre con buona accuratezza le masse nucleari misurate sperimentalmente. Il modello si basa sull'esistenza di un potenziale efficace tale per cui sia applicabile il metodo variazionale di Hartree-Fock; l'hamiltoniana totale H viene scritta come somma di due hamiltoniane separabili, una di monopolio H_m e una di multipolo H_M . Il termine di monopolio è responsabile della saturazione dell'energia di legame e delle proprietà di particella singola, mentre il termine di multipolo descrive le interazioni residue di pairing e di quadrupolo. Uno dei motivi della notorietà del modello è dovuto al valore della *rms*, il più piccolo finora mai ottenuto teoricamente, pari a circa 400 KeV.

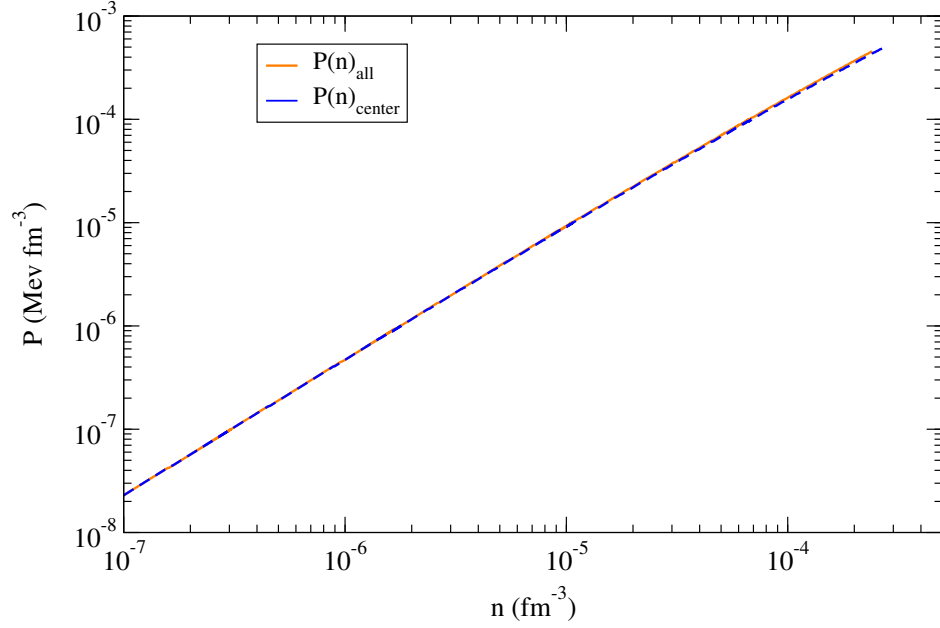


Figura 2.7: Equazione di stato del sistema, con modello a goccia liquida.

Tabella 2.4: Proprietà della crosta esterna a vari valori di pressione, ricavate con il modello di Duflo-Zuker. Le pressioni sono riportate in MeV fm^{-3} , le densità in g cm^{-3} e le energie di separazione dell'ultimo neutrone B_n in MeV. Vengono riportate tutte le transizioni di specie nucleare che si verificano nella crosta.

Nucleo	Z	N	P_{min}	P_{max}	ρ_{max}	y	B_n
^{60}Ni	28	32	P_{ion}	$1.35 \cdot 10^{-10}$	$3.37 \cdot 10^6$	0.467	$4.00 \cdot 10^{-2}$
^{62}Ni	28	34	$1.36 \cdot 10^{-10}$	$5.57 \cdot 10^{-8}$	$3.19 \cdot 10^8$	0.452	$4.00 \cdot 10^{-2}$
^{64}Ni	28	36	$5.58 \cdot 10^{-8}$	$2.77 \cdot 10^{-7}$	$1.10 \cdot 10^9$	0.438	$2.18 \cdot 10^{-2}$
^{86}Kr	36	50	$2.78 \cdot 10^{-7}$	$6.85 \cdot 10^{-7}$	$2.27 \cdot 10^9$	0.419	$7.70 \cdot 10^{-3}$
^{84}Se	34	50	$6.86 \cdot 10^{-7}$	$4.16 \cdot 10^{-6}$	$9.04 \cdot 10^9$	0.405	$1.21 \cdot 10^{-2}$
^{82}Ge	32	50	$9.05 \cdot 10^{-7}$	$1.55 \cdot 10^{-5}$	$2.52 \cdot 10^{10}$	0.390	$-5.18 \cdot 10^{-3}$
^{80}Zn	30	50	$1.56 \cdot 10^{-7}$	$4.55 \cdot 10^{-5}$	$5.88 \cdot 10^{10}$	0.375	$-1.52 \cdot 10^{-2}$
^{78}Ni	28	50	$4.56 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$	$1.23 \cdot 10^{11}$	0.359	$-2.56 \cdot 10^{-2}$
^{80}Ni	28	52	$1.17 \cdot 10^{-4}$	$1.28 \cdot 10^{-4}$	$1.37 \cdot 10^{11}$	0.350	$-5.64 \cdot 10^{-2}$
^{124}Mo	42	82	$1.38 \cdot 10^{-4}$	$1.76 \cdot 10^{-4}$	$1.81 \cdot 10^{11}$	0.339	$-3.09 \cdot 10^{-2}$
^{122}Zr	40	82	$1.82 \cdot 10^{-4}$	$3.09 \cdot 10^{-4}$	$2.82 \cdot 10^{11}$	0.328	$-3.56 \cdot 10^{-2}$
^{120}Sr	38	82	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$4.54 \cdot 10^{-4}$	$3.93 \cdot 10^{11}$	0.317	$-3.97 \cdot 10^{-2}$
^{118}Kr	36	82	$4.55 \cdot 10^{-4}$	$4.89 \cdot 10^{-4}$	$4.31 \cdot 10^{11}$	0.305	$-4.37 \cdot 10^{-2}$

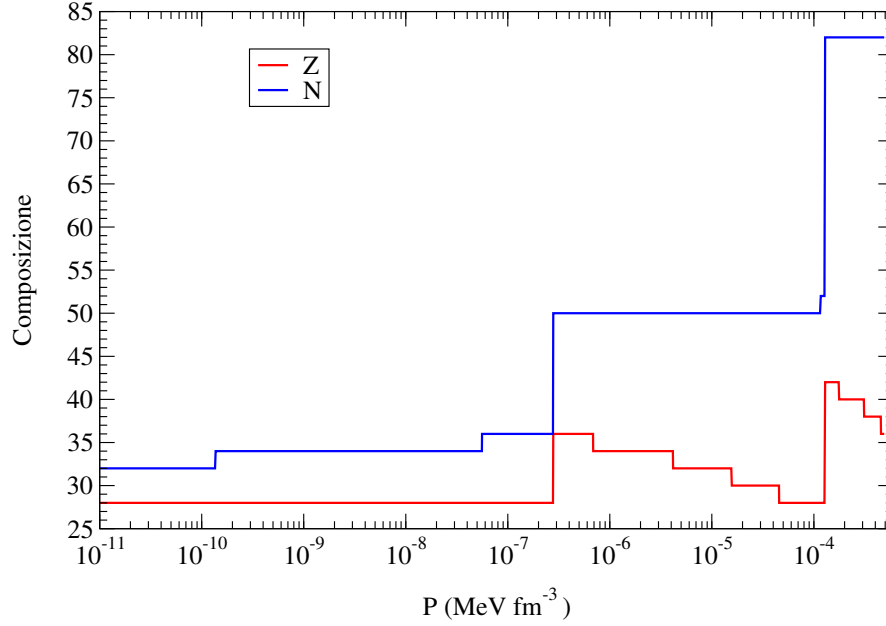


Figura 2.8: Sequenza dei nuclei presenti nella crosta esterna in assenza di campo magnetico utilizzando il modello di Duflo-Zuker.

Gli effetti nucleari di struttura a shell si ripercuotono in maniera evidente sulla composizione, come si vede dalla figura 2.8 e dalla tabella 2.4: ogni nucleo presente nella crosta esterna è dotato di almeno un numero magico. La tabella 2.4 riporta tutti i cambi di specie nucleare che si verificano nella crosta. Analogamente a quanto avveniva per la composizione determinata con il modello a goccia liquida, per minimizzare $g(A, Z; P)$ il sistema diminuisce y per limitare il contributo elettronico g_e ; in questo modo si vengono a formare nuclei sempre più abbondanti in neutroni, come si nota dalla figura 2.9.

La regione iniziale della crosta è caratterizzata dal numero magico $Z = 28$: il nucleo favorito fino a $P = 1.35 \cdot 10^{-10} \text{ MeV fm}^{-3}$ è il ^{60}Ni , mentre i due seguenti cambi di nucleo mantengono chiusa la shell di protoni e aumentano N .

A $P = 2.78 \cdot 10^{-7} \text{ MeV fm}^{-3}$, i neutroni si dispongono sulla shell chiusa $N = 50$, e contemporaneamente Z aumenta per non innalzare eccessivamente l'energia di asimmetria; inizia una seconda regione nella quale il numero di neutroni rimane costante, mentre Z diminuisce per effetto del gas elettronico. Raggiunta la configurazione doppiamente magica $Z = 28$ e $N = 50$, l'unico modo per arginare il contributo elettronico è un aumento dei neutroni fino alla shell chiusa $N = 82$; il comportamento della terza regione, caratterizzata da $N = 82$, è analogo a quello della seconda. Infatti Z diminuisce progressivamente fino al raggiungimento della *neutron drip line* a $P_{drip} = 4.89 \cdot 10^{-4} \text{ MeV fm}^{-3}$.

In figura 2.9 è riportato l'andamento della differenza tra neutroni e protoni dei nuclei presenti nella crosta in funzione della pressione, che riflette la decrescita di y . In figura 2.10 viene rappresentata l'equazione di stato del sistema.

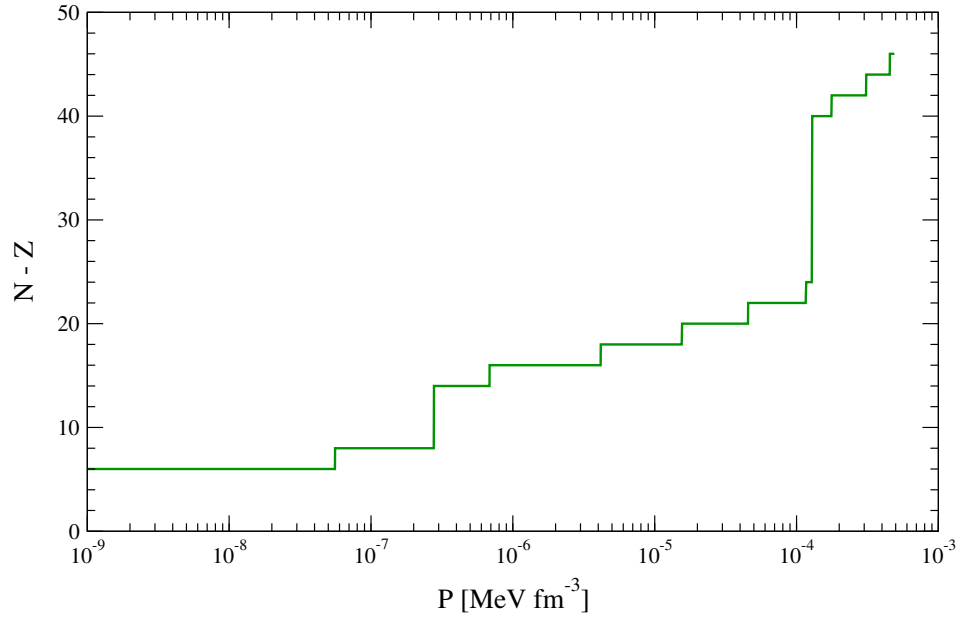


Figura 2.9: Differenza tra neutroni e protoni nei nuclei del reticolo in funzione della pressione del sistema, con modello di Duflo-Zuker.

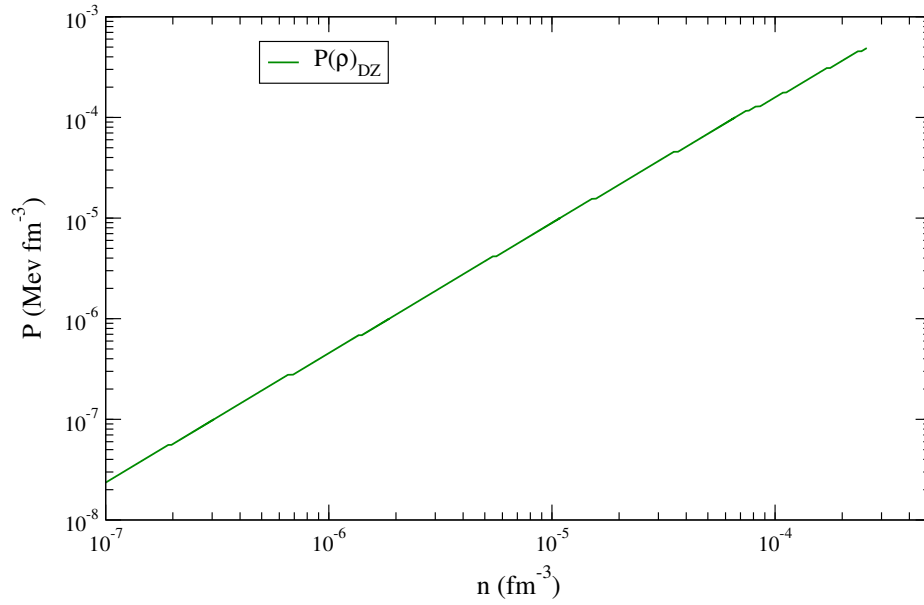


Figura 2.10: Equazione di stato del sistema, con modello di Duflo-Zuker.

Capitolo 3

Composizione della crosta esterna in presenza di campo magnetico

L'obiettivo fondamentale di questa sezione dell'elaborato è comprendere come la sequenza di nuclei presenti nella crosta esterna possa essere alterata da un intenso campo magnetico, e a causa di quali processi fisici avvenga questo cambiamento. In base a quanto discusso nella prima parte dell'elaborato, i valori minimi di campo magnetico su cui si focalizzerà la discussione sono nell'ordine dei $(10^{12} - 10^{13})$ G.

Innanzitutto è necessario chiedersi se il campo magnetico influenzi energeticamente sia i nuclei sia il gas elettronico. Se la struttura dei livelli nucleari venisse modificata significativamente, i modelli per le masse su cui si sono basate le analisi della sezione precedente sarebbero inutilizzabili. È stato evidenziato come a partire da campi magnetici pari a $2 \cdot 10^{17}$ G il *ground state* di nuclei nella regione del Fe venga alterato di qualche decina di KeV rispetto al caso di assenza di campo [31]; è quindi ragionevole trascurare l'influenza del campo sulla struttura nucleare interna, concentrandosi solo sul cambiamento energetico del gas di elettroni.

3.1 Effetti di un campo magnetico su un elettrone isolato

Prima di considerare un gas di elettroni a temperatura nulla sottoposto ad un campo magnetico, è utile introdurre brevemente la dinamica classica di un elettrone non relativistico. Il moto di un elettrone di carica $q = e$ e posizione $\vec{r}$, soggetto ad un campo magnetico costante nel tempo $\vec{B}(\vec{r})$, è determinato dalla forza di Lorentz:

$$\vec{F} = e \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

La lagrangiana classica associata al sistema vale [38]:

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{m_e}{2} \vec{v}^2 + e \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

dove $\vec{A}$ è il potenziale vettore associato al campo magnetico, definito dalla relazione $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Il momento coniugato $\vec{p}$ e l'hamiltoniana H sono:

$$\vec{p} = m_e \vec{v} + e \vec{A}(\vec{r})$$

$$H = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - L = \frac{1}{2} m_e \vec{v}^2 = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m_e} \quad (3.1)$$

Dalla lagrangiana del sistema si ricavano le equazioni del moto per l' i -esima direzione:

$$\begin{aligned} m_e \frac{dv_i}{dt} &= -e \frac{\partial A_i}{\partial t} + e v_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \\ m_e \frac{dv_i}{dt} &= e(\vec{v} \times \vec{B})_i \quad v_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i \end{aligned}$$

Restringendosi al caso di campo magnetico uniforme parallelo all'asse z , ovvero $\vec{B} = (0, 0, B)$, due delle tre equazioni del moto sono caratteristiche dell'oscillatore armonico:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = eB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -eB\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + \eta \cos(\omega_c t - \varphi_0) \\ y(t) = y_0 + \eta \sin(\omega_c t - \varphi_0) \\ z(t) = z_0 + v_z t \end{cases} \quad \omega_c = \frac{|e|B}{m_e}$$

La particella percorre un'elica circolare con frequenza¹ costante ω_c e fase iniziale φ_0 , con asse fisso nel tempo e parallelo all'asse z . La traiettoria nel piano xOy , perpendicolare al campo, consiste in circonferenze di raggio² costante η centrate in (x_0, y_0) . Lungo l'asse z non agiscono forze, il moto è rettilineo uniforme con velocità $v_z = v_{0z}$.

L'approccio quantistico al problema prevede che la dinamica di un elettrone sottoposto a un potenziale vettore $\hat{A}$ si ricavi da un'hamiltoniana quantistica di particella libera, effettuando la sostituzione minimale per il campo elettromagnetico:³

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p} - e\hat{A})^2}{2m_e}$$

Sfruttando la libertà di gauge, si può scrivere il potenziale vettore $\hat{A}$ associato al campo magnetico omogeneo lungo z come $\hat{A} = (\hat{A}_x, \hat{A}_y, \hat{A}_z) = (-B\hat{y}, 0, 0)$. Essendo l'elettrone dotato di spin $1/2$ occorre considerare l'interazione tra l'operatore di spin $\hat{s}$ e l'operatore di campo magnetico $\hat{B}$, introducendo nell'hamiltoniana un termine aggiuntivo $\hat{H}_s$ [39]:

$$\hat{H}_s = -\hat{\mu} \cdot \hat{B}$$

$\hat{\mu}$ è l'operatore di momento magnetico intrinseco dell'elettrone, proporzionale all'operatore di spin $\hat{s}$:

$$\hat{\mu} = \frac{\mu}{s} \hat{s} \quad \frac{\mu}{s} = -\frac{e}{m_e}$$

Con il gauge scelto e con l'inserimento di $\hat{H}_s$, l'hamiltoniana totale $\hat{H}$ risulta:

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{(\hat{p}_x + eB\hat{y})^2}{2m_e}}_{\hat{H}_x} + \underbrace{\frac{\hat{p}_y^2}{2m_e}}_{\hat{H}_y} + \underbrace{\frac{\hat{p}_z^2}{2m_e}}_{\hat{H}_z} - \underbrace{\frac{\mu}{s} B \hat{s}_z}_{\hat{H}_s}$$

¹Denominata frequenza di ciclotrone.

²Determinato dalle condizioni iniziali del moto.

³Si può procedere equivalentemente a partire dall'equazione (3.1), quantizzando $\vec{p}$ e $\vec{A}$.

L'hamiltoniana di spin $\hat{H}_s$ commuta con l'hamiltoniana totale $\hat{H}$, quindi la componente di spin lungo z si conserva nel tempo e $\hat{s}_z$ può essere sostituito direttamente dall'autovalore σ ; ne segue che la parte spinoriale della funzione d'onda $\psi(x, y, z, \sigma)$ è irrilevante. Inoltre la separazione delle variabili è permessa dato che $\hat{H}_x$, $\hat{H}_y$ e $\hat{H}_z$ commutano l'una con l'altra e con l'hamiltoniana totale $\hat{H}$:

$$H\psi(x, y, z, \sigma) = E\psi(x, y, z, \sigma) \quad (3.2)$$

$$\psi(x, y, z) = e^{ip_z z + ip_x x} \phi(y) \quad (3.3)$$

L'autofunzione $\phi(y)$ è la soluzione dell'equazione di Schrödinger ottenuta sostituendo la (3.3) nella (3.2) [39]:

$$\phi'' + 2m_e \left[\left(E + \frac{\mu\sigma}{s} B - \frac{p_z^2}{2m_e} \right) - \frac{m_e}{2} \omega_c^2 (y - y_0)^2 \right] \phi = 0 \quad y_0 = -\frac{p_x}{B} \quad (3.4)$$

La formula (3.4) è analoga all'equazione di Schrödinger per un oscillatore armonico unidimensionale con frequenza ω_c ; y_0 è un numero quantico conservato nel gauge scelto e corrisponde alla coordinata classica y del centro dell'orbita. I livelli energetici del sistema si ricavano immediatamente dall'equazione precedente:

$$E(n, \sigma, p_z) = \left(n + \frac{1}{2} + \sigma \right) \omega_c + \frac{p_z^2}{2m_e}$$

I numeri quantici n e σ suggeriscono una degenerazione nei livelli energetici: $E(n, 1/2, p_z) = E(n+1, -1/2, p_z)$. Per convenienza si può definire il numero quantico $\nu = n + \sigma$, grazie al quale ogni livello è doppiamente degenero, ad esclusione dello stato fondamentale non degenero.

$$E(\nu, p_z) = \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \omega_c + \frac{p_z^2}{2m_e} \quad (3.5)$$

Lungo la direzione del campo lo spettro energetico è continuo e caratteristico della particella libera. Nel piano perpendicolare i livelli energetici, detti livelli di Landau, sono discreti, equidistanziati e caratteristici dell'oscillatore armonico unidimensionale.

3.2 Effetti di un campo magnetico su un gas di elettroni a $T = 0$

La densità degli stati $g(p)$ per un gas elettronico a $T = 0$ sottoposto ad un campo omogeneo $\vec{B} = (0, 0, B)$, definita come il numero di particelle dn presenti nel gas aventi un momento compreso tra p e $p + dp$ per unità di volume, vale ¹ [39]:

$$g(p) = \sum_{\nu} \frac{|e|B}{2\pi^2} g_{\nu} \quad g_{\nu} = \begin{cases} 1 & \nu = 0 \\ 2 & \nu \neq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Dalla definizione di densità degli stati si ricava immediatamente la densità elettronica:

¹Il calcolo della densità degli stati viene svolto, sia in assenza che in presenza di campo magnetico omogeneo, in Appendice A.

$$n_e = \int g(p) d^3p \rightarrow \frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_{\nu} g_{\nu} \int dp_z \quad (3.7)$$

È utile definire il campo magnetico critico B_c , corrispondente a un'energia di ciclotrone pari alla massa a riposo. A partire da campi $B \sim B_c$ gli effetti relativistici diventano significativi per l'elettrone, e la trattazione classica perde validità. Inoltre si definisce il campo magnetico adimensionale $B_{\star}$ come il rapporto tra B e B_c :

$$\omega_c = m_e \quad \Rightarrow \quad B_c = \frac{m_e^2}{|e|} = 4.414 \cdot 10^{13} \text{ G} \quad B_{\star} = \frac{B}{B_c}$$

L'energia dell'elettrone relativistico sottoposto a un campo $B_{\star}$ si ottiene generalizzando la (3.5) al caso relativistico [40]:

$$p_e^2 + m_e^2 (1 + 2\nu B_{\star}) = E_e^2 \quad (3.8)$$

L'energia E_e viene ripartita in tre termini: la massa m_e , il momento p_e e l'energia di interazione con il campo $m_e \sqrt{2\nu B_{\star}}$. All'interno di un gas a temperatura nulla, la somma in quadratura di questi tre contributi non può essere superiore al quadrato dell'energia di Fermi μ_e , detta equivalentemente potenziale chimico. Si definisce inoltre ν_m il numero quantico relativo al livello di Landau più energetico disponibile per gli elettroni. Utilizzando la (3.8) il momento associato ad un elettrone di energia E_e che occupa il ν -esimo livello di Landau è:

$$p_e(\nu) = \sqrt{E_e^2 - m_e^2(1 + 2\nu B_{\star})} \quad \Rightarrow \quad m_e \sqrt{1 + 2\nu B_{\star}} \leq E_e \leq \mu_e$$

$$0 \leq p_e(\nu) \leq \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2(1 + 2\nu B_{\star})} \quad (3.9)$$

A fissata energia elettronica E_e , l'intervallo permesso per i momenti p_e di elettroni che occupano livelli di Landau con numero quantico ν_1 è più ampio rispetto al caso con $\nu_2 > \nu_1$. Ad ogni livello di Landau con numero quantico ν è associato un momento di Fermi $p_e^F(\nu)$ tale per cui l'energia dell'elettrone sia uguale all'energia di Fermi:

$$E_e = \mu_e \quad \Rightarrow \quad p_e^F(\nu)^2 + m_e^2 (1 + 2\nu B_{\star}) = \mu_e^2 \quad (3.10)$$

Si nota una differenza importante rispetto al caso di assenza di campo magnetico: non esiste un unico momento di Fermi del sistema, valido per tutti gli elettroni presenti, ma si parla di $(\nu_m + 1)$ momenti di Fermi differenti a seconda del livello di Landau occupato. Imponendo $p_e^F(\nu) = 0$ nell'equazione precedente si determina il massimo livello di Landau occupato, e quindi il limite superiore della sommatoria nella (3.7). Questo significa che l'energia dovuta alla massa e l'energia dovuta all'occupazione del livello di Landau ν_m sommate in quadratura coincidono con il quadrato dell'energia di Fermi:

$$p_e^F(\nu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_e^2 = m_e^2 (1 + 2\nu_m B_{\star}) \quad \Rightarrow \quad \nu_m = \frac{1}{2B_{\star}} \left(\frac{\mu_e^2}{m_e^2} - 1 \right) \quad (3.11)$$

Dalla (3.11) è possibile ottenere un valore di ν_m non intero, contro l'ipotesi di discrezza dei livelli: il numero quantico relativo all'ultimo livello di Landau occupabile dagli elettroni si ottiene troncando le cifre decimali di ν_m . In base alla (3.8), aumentando il

campo magnetico i livelli di Landau si distanziano l'uno dall'altro; come conseguenza ν_m tende a diminuire, come si vede nell'equazione (3.11). Nel caso di campo molto intenso, l'energia associata al primo livello di Landau oltrepassa μ_e ¹: il livello non può essere popolato, e la (3.10) si riduce all'equazione relativistica energia-momento.

In figura 3.1 vengono rappresentati graficamente esempi di livelli energetici degli elettroni in un gas a $T = 0$ immerso in un campo magnetico B . Sono indicati con p i momenti elettronici; l'energia dell'elettrone a , associato al terzo livello di Landau, coincide con l'energia di Fermi μ_e . Gli elettroni b e c hanno uguale energia, ma ripartita in modi differenti: b occupa il secondo livello di Landau, c il primo. Infine l'energia nel caso d coincide con la massa elettronica: l'elettrone ha momento nullo e non occupa nessun livello di Landau.

Definendo il momento di Fermi adimensionale $x_e(\nu)$ e utilizzando la densità degli stati (3.6) si ottiene la densità di energia elettronica del gas ε_e :

$$\begin{aligned}
 x_e(\nu) &= \frac{p_e^F(\nu)}{m_e} & n_e &= \frac{B_\star m_e^3}{4\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_m} g_\nu x_e(\nu) \\
 \varepsilon_e &= \int E(p) g(p) dp = \frac{B_\star m_e^3}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_m} g_\nu \int_0^{x_e(\nu)} E_e(\nu, p_z) d\left(\frac{p_z}{m_e}\right) = \\
 &= \frac{B_\star m_e^4}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_m} g_\nu (1 + 2\nu B_\star) \tau_+ \left[\frac{x_e(\nu)}{\sqrt{1 + 2\nu B_\star}} \right] \\
 \tau_+(x) &= \int_0^x \sqrt{1 + y^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1 + x^2})
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

La pressione elettronica P_e si ricava a partire da n_e e da ε_e , secondo la (2.8), mentre la pressione di reticolo P_l si ottiene esprimendo la (2.9) in funzione della densità fermionica:

$$\begin{aligned}
 P_e &= -\varepsilon_e + n_e \mu_e = \frac{B_\star m_e^4}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_m} g_\nu (1 + 2\nu B_\star) \tau_- \left[\frac{x_e(\nu)}{\sqrt{1 + 2\nu B_\star}} \right] \\
 \tau_-(x) &= \frac{1}{2} x \sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \\
 P_l &= \frac{1}{3} \varepsilon_l = -0.481 Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3}
 \end{aligned}$$

$$P = P_e + P_l = \frac{B_\star m_e^4}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_m} g_\nu (1 + 2\nu B_\star) \tau_- \left[\frac{x_e(\nu)}{\sqrt{1 + 2\nu B_\star}} \right] - 0.481 Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3} \tag{3.13}$$

¹o, equivalentemente, si ha $\nu_m < 1$.

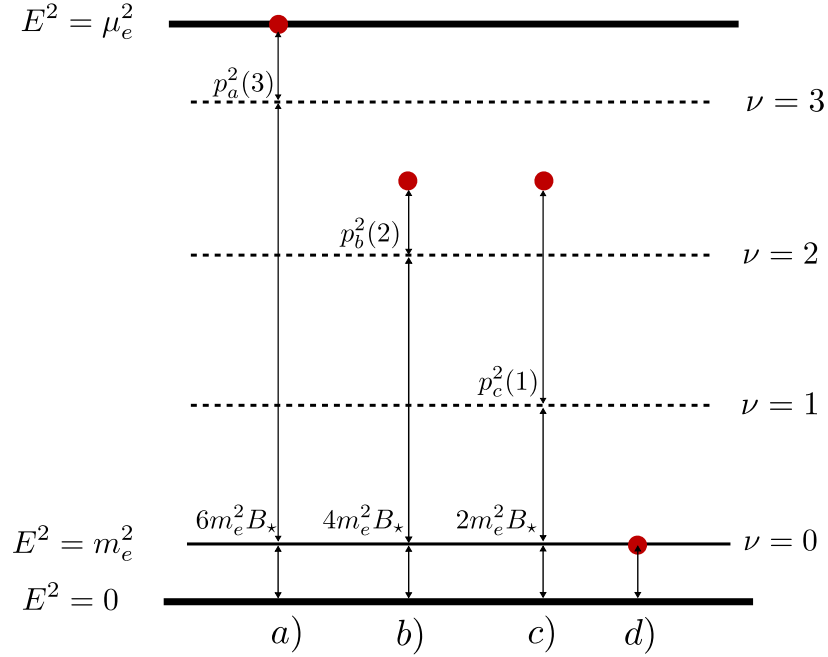


Figura 3.1: Illustrazione di un esempio di livelli energetici degli elettroni in un gas a $T = 0$ immerso in un campo magnetico omogeneo B .

3.3 Determinazione della sequenza di nuclei

Per determinare la composizione si segue un processo analogo a quello svolto nel caso di assenza di campo magnetico. Considerando P come variabile indipendente del sistema, il nucleo energeticamente favorito minimizza l'energia di Gibbs $g(A, Z; P)$ (2.11):

$$g(A, Z; P) = \frac{M(A, Z)}{A} + \frac{Z}{A} \left(\mu_e(P) + 4 \frac{P_l(A, Z)}{n_e} \right)$$

Scelta la coppia (A, Z) , le grandezze necessarie per determinare $g(A, Z; P)$ e quindi la sequenza dei nuclei sono μ_e e n_e ; per calcolarle si devono utilizzare parte delle relazioni ricavate nel paragrafo precedente:

$$\begin{cases} \mu_e^2 = m_e^2 (1 + 2\nu_m B_\star) \\ p_e^F(\nu)^2 + m_e^2 (1 + 2\nu B_\star) = \mu_e^2 & 0 \leq \nu \leq \nu_m \\ n_e = \frac{B_\star m_e^3}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_m} g_\nu x_e(\nu) \\ P = P_e + P_l(A, Z) \end{cases} \quad (3.14)$$

La difficoltà nella determinazione della composizione consiste nella risoluzione del sistema (3.14) fornendo come dati la quaterna $(A, Z, P, B_\star)$. Le incognite del sistema sono μ_e , ν_m , n_e e i $(\nu + 1)$ momenti $p_e^F(\nu)$. Escludendo il caso $\nu = 0$, corrispondente a campi magnetici particolarmente intensi, il sistema non è risolubile analiticamente; inoltre la terza e la quarta equazione contengono un numero variabile di termini a seconda del

valore di ν_m .

Il procedimento utilizzato per la risoluzione del sistema consiste nell'inserire un potenziale chimico *di tentativo* μ_i , dal quale ricavare ν_m , n_e e i $(\nu + 1)$ momenti $p_e^F(\nu)$ dalle prime tre equazioni. Il valore di μ che risolve il sistema è tale che il termine a destra della (3.13) sia uguale alla pressione in ingresso. Una volta inserito μ_i la pressione elettronica è determinata e, utilizzando i valori di Z e A in ingresso, si calcola P_l . Se $P > P_e + P_l$ allora μ_i non è sufficientemente alto per risolvere il sistema, e deve essere aumentato di un passo $\delta\mu$. Il processo di aumento di μ deve essere ripetuto fino a quando la quarta equazione risulta verificata entro un certo errore. Nel codice per la risoluzione del sistema sono stati scelti come potenziale chimico iniziale $\mu_i = m_e$ e come passo $\delta\mu = 10^{-6}$ MeV.

Ottenuto il μ che risolve il sistema, si calcola l'energia di Gibbs (2.11). È stato utilizzato il modello di Duflo-Zuker per via dell'alta accuratezza, in modo da poter inoltre confrontare i risultati di questa sezione con quelli del capitolo precedente. $g(A, Z)$ deve essere calcolata per tutti i nuclei per i quali è nota l'energia di legame dalla tabella di Duflo-Zuker; si ricava il nucleo energeticamente favorito confrontando tutte le energie di Gibbs e selezionando la minore. In figura 3.2 e in tabella 3.1 vengono presentate le composizioni ottenute scegliendo rispettivamente tre¹ e quattro differenti campi magnetici ($B_\star = 1$, $B_\star = 10$, $B_\star = 100$, $B_\star = 1000$). La tabella 3.1 riporta tutti i cambi di specie nucleare che si verificano nella crosta.

¹Non viene riportato il caso $B_\star = 1$.

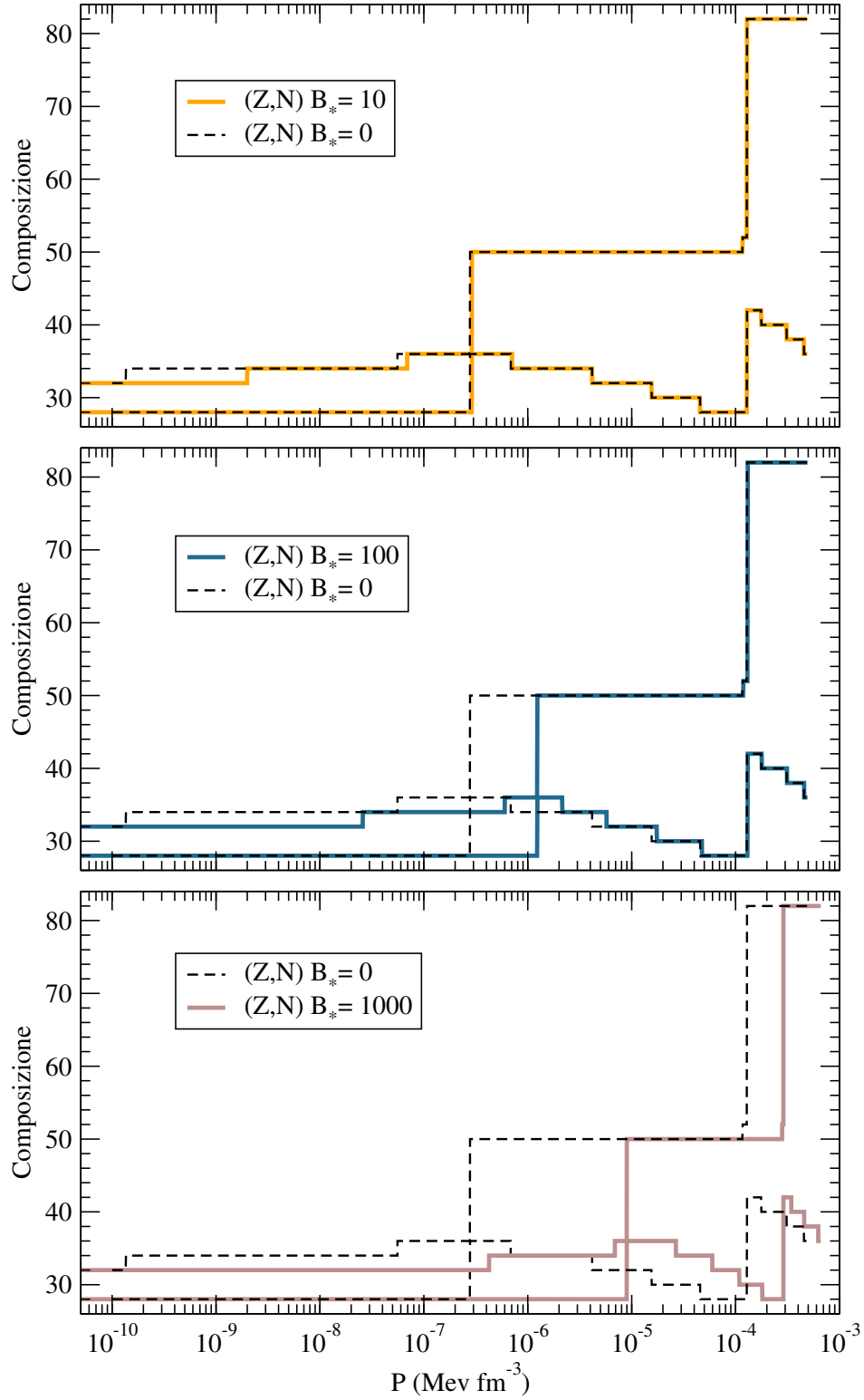


Figura 3.2: Sequenza dei nuclei presenti nella crosta esterna in presenza di campo magnetico utilizzando il modello di Duflo-Zuker.

Tabella 3.1: Pressioni, in MeV fm^{-3} , e densità fermioniche, in fm^{-3} , corrispondenti alle transizioni di specie nucleare per quattro valori di campo magnetico.

Z	A	$B_\star = 1$		$B_\star = 10$		$B_\star = 100$		$B_\star = 1000$	
		$P_{\max}$	$n_e \max$	$P_{\max}$	$n_e \max$	$P_{\max}$	$n_e \max$	$P_{\max}$	$n_e \max$
26	60	$1.74 \cdot 10^{-10}$	$2.21 \cdot 10^{-9}$	$1.99 \cdot 10^{-9}$	$2.36 \cdot 10^{-8}$	$2.58 \cdot 10^{-8}$	$2.68 \cdot 10^{-7}$	$4.24 \cdot 10^{-7}$	$3.43 \cdot 10^{-6}$
26	62	$5.40 \cdot 10^{-8}$	$1.90 \cdot 10^{-7}$	$6.91 \cdot 10^{-8}$	$2.12 \cdot 10^{-7}$	$6.01 \cdot 10^{-7}$	$1.06 \cdot 10^{-6}$	$6.89 \cdot 10^{-6}$	$1.16 \cdot 10^{-6}$
28	64	$2.73 \cdot 10^{-7}$	$6.57 \cdot 10^{-7}$	$2.90 \cdot 10^{-7}$	$7.05 \cdot 10^{-7}$	$1.23 \cdot 10^{-6}$	$1.54 \cdot 10^{-6}$	$8.97 \cdot 10^{-6}$	$1.35 \cdot 10^{-5}$
36	86	$6.89 \cdot 10^{-7}$	$1.38 \cdot 10^{-6}$	$7.06 \cdot 10^{-7}$	$1.35 \cdot 10^{-6}$	$2.14 \cdot 10^{-6}$	$2.01 \cdot 10^{-6}$	$2.66 \cdot 10^{-5}$	$2.38 \cdot 10^{-5}$
34	84	$4.14 \cdot 10^{-6}$	$5.43 \cdot 10^{-6}$	$4.16 \cdot 10^{-6}$	$5.43 \cdot 10^{-6}$	$5.72 \cdot 10^{-6}$	$6.25 \cdot 10^{-6}$	$5.96 \cdot 10^{-5}$	$3.63 \cdot 10^{-5}$
32	82	$1.55 \cdot 10^{-5}$	$1.51 \cdot 10^{-5}$	$1.55 \cdot 10^{-5}$	$1.51 \cdot 10^{-5}$	$1.74 \cdot 10^{-5}$	$1.59 \cdot 10^{-5}$	$1.08 \cdot 10^{-4}$	$5.04 \cdot 10^{-5}$
30	80	$4.55 \cdot 10^{-4}$	$3.49 \cdot 10^{-5}$	$4.54 \cdot 10^{-5}$	$3.51 \cdot 10^{-5}$	$4.74 \cdot 10^{-5}$	$3.40 \cdot 10^{-5}$	$1.80 \cdot 10^{-4}$	$6.74 \cdot 10^{-5}$
28	78	$1.11 \cdot 10^{-4}$	$7.39 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$	$7.41 \cdot 10^{-5}$	$1.18 \cdot 10^{-4}$	$7.47 \cdot 10^{-5}$	$2.80 \cdot 10^{-4}$	$8.76 \cdot 10^{-5}$
28	80	$1.26 \cdot 10^{-4}$	$8.18 \cdot 10^{-5}$	$1.28 \cdot 10^{-4}$	$8.18 \cdot 10^{-5}$	$1.30 \cdot 10^{-4}$	$8.17 \cdot 10^{-5}$	$2.88 \cdot 10^{-4}$	$9.11 \cdot 10^{-5}$
42	124	$1.77 \cdot 10^{-4}$	$1.06 \cdot 10^{-4}$	$1.76 \cdot 10^{-4}$	$1.08 \cdot 10^{-4}$	$1.78 \cdot 10^{-4}$	$1.07 \cdot 10^{-4}$	$3.43 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$
40	122	$3.09 \cdot 10^{-4}$	$1.70 \cdot 10^{-4}$	$3.09 \cdot 10^{-4}$	$1.71 \cdot 10^{-4}$	$3.16 \cdot 10^{-4}$	$1.71 \cdot 10^{-4}$	$4.57 \cdot 10^{-4}$	$1.74 \cdot 10^{-4}$
38	120	$4.54 \cdot 10^{-4}$	$2.35 \cdot 10^{-4}$	$4.54 \cdot 10^{-4}$	$2.35 \cdot 10^{-4}$	$4.57 \cdot 10^{-4}$	$2.36 \cdot 10^{-4}$	$6.24 \cdot 10^{-4}$	$2.71 \cdot 10^{-4}$
36	118	$4.89 \cdot 10^{-4}$	$2.58 \cdot 10^{-4}$	$4.89 \cdot 10^{-4}$	$2.58 \cdot 10^{-4}$	$4.92 \cdot 10^{-4}$	$2.59 \cdot 10^{-4}$	$6.59 \cdot 10^{-4}$	$2.93 \cdot 10^{-4}$

Dalle figure si evince come l'ordine di apparizione delle specie nucleari rimanga invariato rispetto al caso di assenza di campo; tuttavia gli intervalli di pressione corrispondenti ad un dato nucleo vengono alterati. È evidente infatti come le transizioni di nuclei risultino traslate a pressioni maggiori tanto più il campo magnetico è intenso. Per $B_\star = 1$ gli effetti del campo sulla composizione sono trascurabili: le differenze rispetto al caso $B = 0$ sono minime e non particolarmente interessanti.

La chiave del problema è contenuta nell'espressione dell'energia di Gibbs (2.11): trascurando in prima approssimazione il poco influente contributo di reticolo, l'unico termine influenzato dal campo magnetico è μ_e . Se ad una data pressione P avviene una transizione, allora significa che μ_e è giunto ad un valore critico μ_{crit} tale per cui al sistema conviene energeticamente diminuire y e di conseguenza cambiare nucleo, e quindi $M(A, Z)$. Se una transizione avviene a $B_{\star 1}$ e non a $B_{\star 2} > B_{\star 1}$, significa che $\mu_e(P, B_{\star 2}) < \mu_{crit} < \mu_e(P, B_{\star 1})$, quindi gli elettroni non sono sufficientemente energetici per indurre il cambio di nucleo.

Questo significa che l'effetto del campo magnetico sul sistema consiste nell'abbassamento, a pressione fissata, del potenziale chimico elettronico¹ e quindi di g . In assenza di campo, il momento elettronico è compreso nell'intervallo $0 \leq p_e \leq p_e^F = \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2}$; il campo agisce togliendo al singolo elettrone la possibilità di posizionarsi in una parte dell'intervallo dei momenti, secondo la (3.9) ($0 \leq p_e(\nu) \leq \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2(1 + 2\nu B_\star)}$) e quindi diminuendo l'energia di Gibbs complessiva del gas. In questo modo il campo ritarda le transizioni.

Oltre ad intervenire su μ , il campo magnetico influenza anche la densità fermionica n_e (3.7), modificando sia l'equazione di stato (si veda la figura 3.4) sia il terzo termine della (2.11). L'energia di Gibbs del reticolo, essendo negativa, tende a cancellare parte

¹Come si vede in figura 3.3.

del potenziale μ , contribuendo al ritardo delle transizioni; l'effetto è più marcato per pressioni basse e per campi alti, ma risulta in qualsiasi caso trascurabile per quanto riguarda la sequenza dei nuclei.

L'interpretazione riguardante gli effetti del campo viene confermata plottando gli andamenti dei potenziali al variare della pressione per i tre valori $B_\star = 10$, $B_\star = 100$, $B_\star = 1000$, riportati in figura 3.3. Il potenziale $\mu_e(B_\star = 1)$ coincide con $\mu_e(B_\star = 0)$ per quasi la totalità della crosta esterna: gli effetti relativistici sono trascurabili e le composizioni sono pressoché equivalenti.

Nella porzione di crosta esterna tra 10^8 MeV fm^{-3} e 10^6 MeV fm^{-3} gli andamenti dei potenziali si differenziano: i campi $B_\star = 100$ e $B_\star = 1000$ inducono potenziali inferiori rispetto a $B_\star = 10$, ritardando in modo evidente alcune transizioni di specie nucleare. A partire dalle pressioni $P \geq 10^{-7} \text{ MeV fm}^{-3}$ e $P \geq 10^{-5} \text{ MeV fm}^{-3}$ i potenziali si ricongiungono rispettivamente per $B_\star = 10$ e $B_\star = 100$ e le composizioni tornano a coincidere. Viceversa, per $B_\star = 1000$ la rapida crescita di μ verso $P \sim 10^{-5} \text{ MeV fm}^{-3}$ induce numerose transizioni in un intervallo di pressione piuttosto ristretto, e $\mu_e(B_\star = 1000)$ rimane separato da $\mu_e(B_\star = 0)$.

Anche la *neutron drip line* viene spostata verso pressioni più alte, come si vede dalla figura 3.5: l'andamento è crescente poichè il campo tenta di impedire l'aumento dell'energia di Gibbs agli elettroni, i quali necessitano di raggiungere pressioni sempre più alte per verificare la condizione $g(P_{drip}) = m_n$.

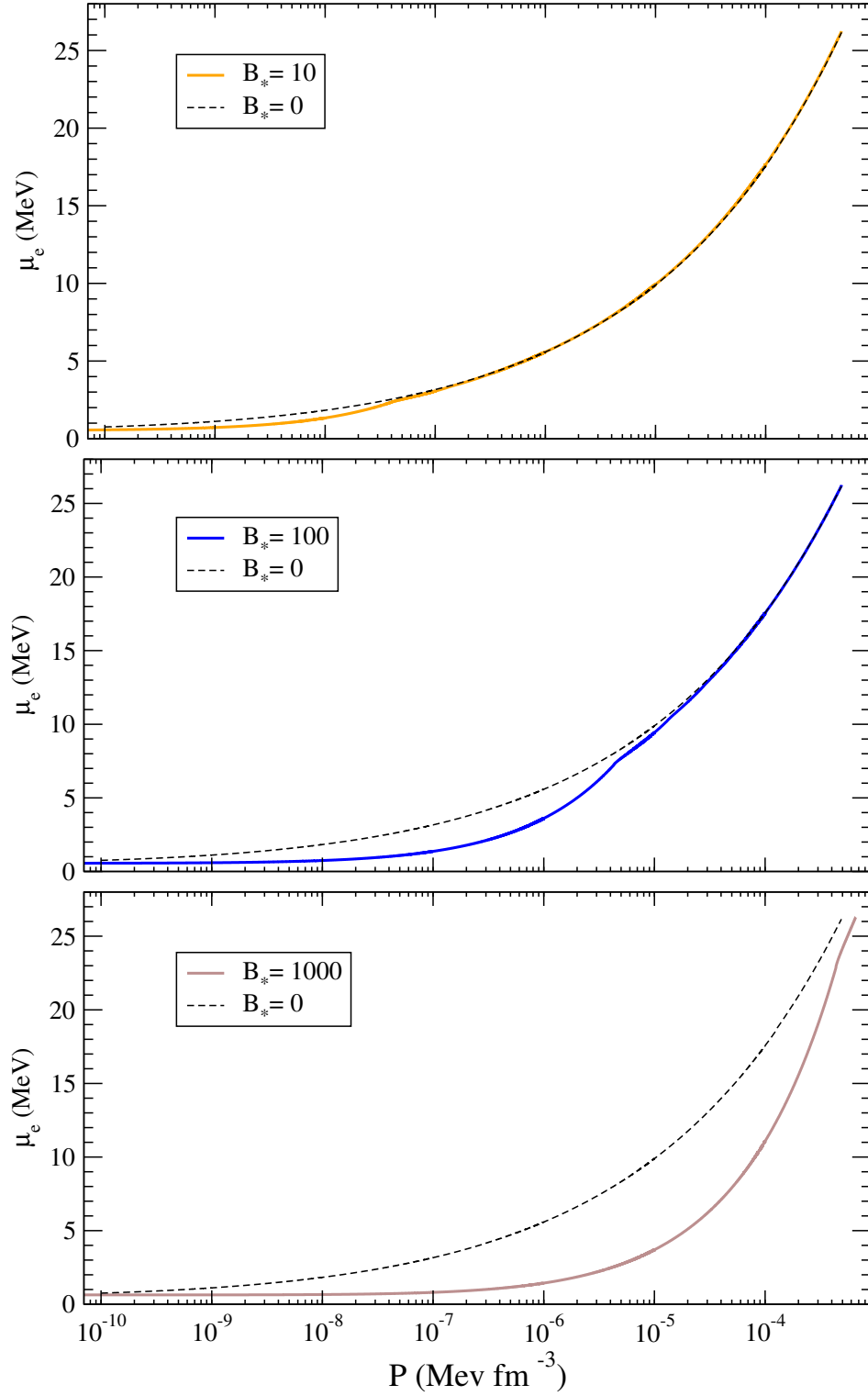


Figura 3.3: Andamento dell'energia di Fermi elettronica μ_e in MeV in funzione della pressione del sistema, per tre valori di campo magnetico.

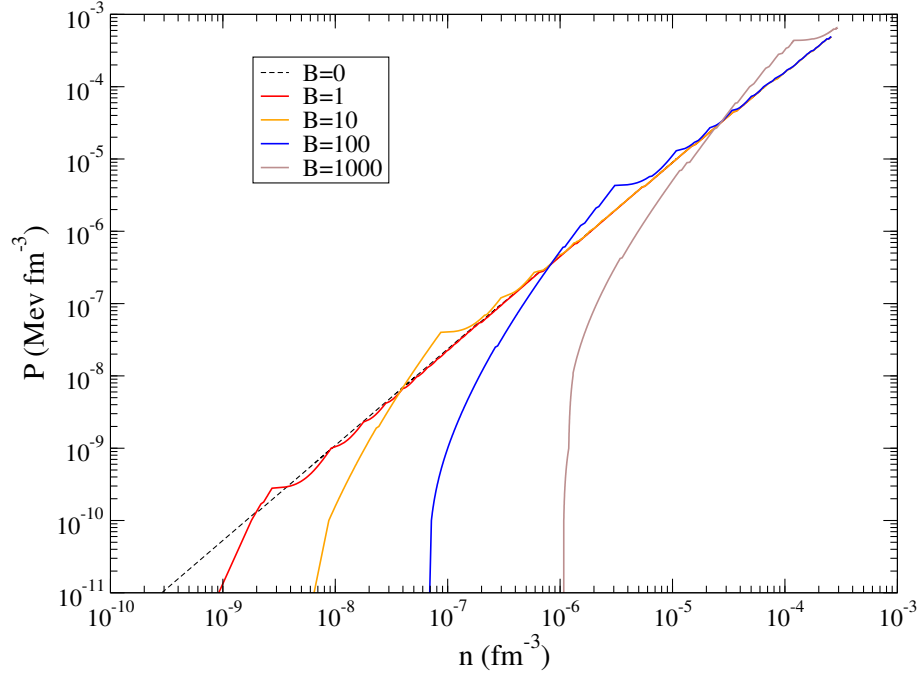


Figura 3.4: Equazione di stato del sistema per quattro valori di campo magnetico.

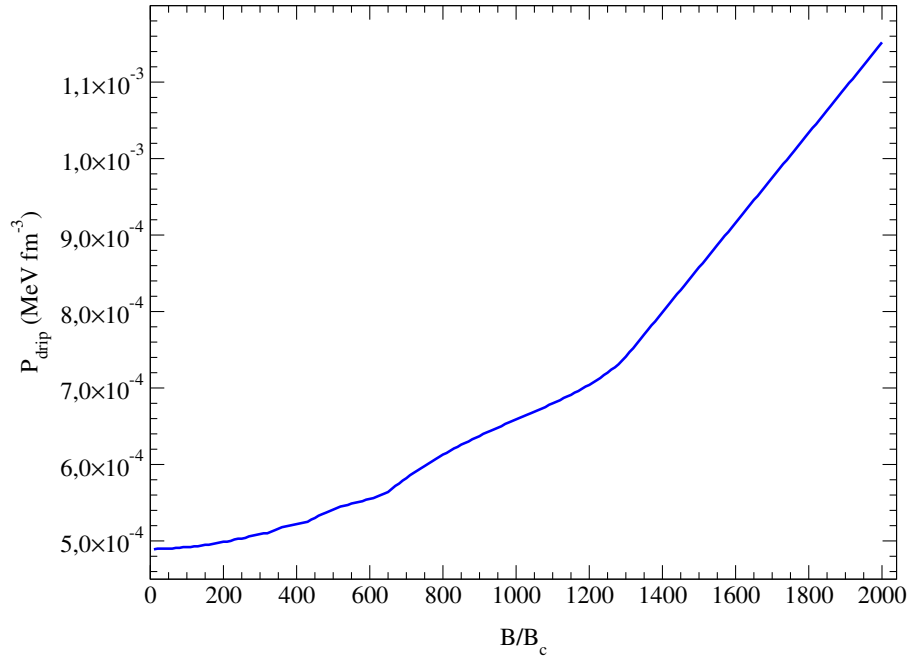


Figura 3.5: Pressione corrispondente alla *neutron drip line* al variare del campo magnetico $B_\star$.

Conclusioni

Giunti al termine dell'elaborato, è utile concludere il lavoro presentando in sintesi i più significativi risultati ottenuti. Il principale obiettivo consisteva nella determinazione della sequenza di nuclei presenti nella crosta esterna delle stelle di neutroni al variare della pressione interna P , sia in presenza sia in assenza di campo magnetico, utilizzando modelli teorici per la descrizione delle masse nucleari.

La composizione nel caso di assenza di campo era già stata ricavata in letteratura in numerose occasioni [29] [41] [30], e in questo elaborato la determinazione è servita come lavoro preliminare allo *step* successivo di inserimento di campo magnetico. Per ottenere la sequenza di nuclei si è dovuto scrivere un codice per il calcolo dell'espressione dell'energia di Gibbs per particella $g(A, Z; P)$ che ricavasse, a pressione P fissata, la coppia di valori (A, Z) in grado di minimizzare g . È stato mostrato come la presenza del gas elettronico induca il sistema a ricercare il *ground state* compiendo catture elettroniche, in modo da diminuire il numero di elettroni presenti, dando origine a nuclei sempre più ricchi di neutroni all'aumentare della pressione.

Il modello a goccia liquida ha fornito una panoramica generale delle proprietà della sequenza di nuclei, caratterizzata da un andamento decrescente di Z/A con la pressione; analizzando i contributi all'energia di Gibbs del sistema, si è dedotto come i principali termini responsabili della variazione delle specie nucleari siano l'energia di Gibbs elettronica g_e e l'energia di Gibbs di asimmetria g_{asym} . Una forma più affidabile della composizione è stata ricavata utilizzando il più accurato modello di Duflo-Zuker, che ha messo in luce il fondamentale ruolo degli effetti di shell: è stata evidenziata l'esistenza di due regioni di pressione caratterizzate da nuclei con numero di neutroni rispettivamente $N = 50$ e $N = 82$.

Nel caso di presenza di campo magnetico la sequenza di nuclei è stata investigata solamente con il modello di Duflo-Zuker, per via della più elevata accuratezza rispetto al modello a goccia. Selezionando quattro valori di campo magnetico realistici per la crosta esterna ($B_\star = 1$, $B_\star = 10$, $B_\star = 100$, $B_\star = 1000$) è emerso come in ognuno dei quattro casi compaiano gli stessi nuclei con lo stesso ordine; in particolare, tutte le composizioni iniziano con il ^{60}Ni e terminano con il ^{118}Kr . Tuttavia molte transizioni di specie nucleare, in particolare quelle che in assenza di campo si verificano nella regione meno densa della crosta, avvengono a pressioni maggiori quanto più il campo magnetico è intenso. Queste osservazioni non valgono per il valore $B_\star = 1$, non sufficientemente elevato da alterare significativamente le pressioni corrispondenti alle transizioni. Rispetto al caso $B = 0$, l'interazione del campo con gli elettroni diminuisce il potenziale chimico

elettronico e di conseguenza anche l'energia di Gibbs, ritardando le transizioni in alcune regioni di pressione.

Rimangono aperti numerosi scenari nello studio dei costituenti della crosta esterna. Tra le migliorie apportabili, si potrebbero considerare reticoli stabili diversi dal *body-centered cubic* e reticoli misti in corrispondenza dei cambi di specie nucleare [42]. Per quanto riguarda invece l'approssimazione $T = 0$, si potrebbe analizzare se l'effetto della correzione di temperatura non nulla sull'energia di Gibbs elettronica g_e conduca ad effetti concreti sulle pressioni di transizione di specie nucleare. Un passo ulteriore consisterebbe nello studio delle componenti della crosta esterna includendo la possibilità che campi magnetici molto intensi siano in grado di influenzare significativamente le energie di legame nucleari.

Appendice A

Densità degli stati di un gas di elettroni a $T = 0$

La densità degli stati $g(p)$ per un sistema quantistico è definita come il numero di elementi del sistema dn aventi momento compreso tra p e $p+dp$, per unità di volume V [38] [39].

$$g(p) = \frac{1}{V} \frac{dn}{dp}$$

Calcolo in assenza di campo magnetico

Si consideri un gas di elettroni non relativistici, non interagenti e a temperatura nulla; le funzioni d'onda degli elettroni sono onde piane, e lo spettro energetico è continuo.

$$E_p = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} \quad \psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

Per il calcolo del numero di stati è utile immaginare di confinare gli elettroni in un cubo di volume $V = L_x L_y L_z$, creando una sorta di buca di potenziale tridimensionale: lo spettro da continuo passa a discreto.

$$p_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i \quad \Rightarrow \quad dn = dn_x dn_y dn_z = g_s \frac{V}{(2\pi)^3} dp_x dp_y dp_z$$

Inserendo la degenerazione di spin dell'elettrone $g_s = 2$ si ottiene la forma finale della densità degli stati, indipendente dal volume V scelto per il cubo¹:

$$g(p) = \frac{g_s}{(2\pi)^3}$$

¹A questo punto è possibile far tendere il volume V all'infinito, ritornando al caso iniziale di spettro continuo.

Calcolo in presenza di campo magnetico

Si aggiunga un campo magnetico omogeneo $B = (0, 0, B)$ generato dal potenziale vettore $A = (A_x, A_y, A_z) = (-By, 0, 0)$, al gas della situazione precedente. Indicando con ν il numero quantico relativo ai livelli di Landau, p_z il momento lungo l'asse z , $\omega_c = |e|\hbar B/m$ la frequenza di ciclotrone, lo spettro energetico vale ²:

$$E(\nu, p_z) = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \omega_c + \frac{p_z^2}{2m_e}$$

Dato che p_x e p_y non compaiono nell'espressione dell'energia elettronica, i livelli hanno degenerazione infinita. Confinando il gas in un'area $S = L_x L_y$ la degenerazione diventa discreta; infatti il numero di valori consentiti per il momento p_x in un intervallo Δp_x a fissato livello di Landau è dato da:

$$n_x = \frac{L_x \Delta p_x}{2\pi\hbar}$$

Il possibile intervallo di valori Δp_x è vincolato dalla condizione che y_0 , che rappresenta classicamente la coordinata y del centro dell'orbita, sia interna all'area:

$$y_0 = -\frac{p_x}{|e|\hbar B} \quad 0 < y_0 < L_y \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{p_x}{|e|\hbar B} < L_y \quad \Rightarrow \quad \Delta p_x = |e|\hbar B L_y$$

Il numero di stati possibili per quanto riguarda il piano perpendicolare alla direzione del campo è dato da:

$$n_{\perp} = \frac{L_x L_y}{4\pi^2\hbar^2} |e|\hbar B$$

La componente p_z del momento non viene influenzata dal campo e il numero di stati può essere calcolato confinando gli elettroni anche lungo z , analogamente a quanto avviene nel caso precedente di particella libera. Considerando la degenerazione g_{ν} degli stati che occupano il ν -esimo livello di Landau e la degenerazione $g_s = 2$ di spin, si ottiene infine:

$$g(p) = \frac{|e|\hbar B}{2\pi^2} g_{\nu}$$

²Si veda l'equazione (3.5).

Bibliografia

- [1] M. Motokowa, *Physics in high magnetic fields*, Rep. Prog. Phys., 67, 1995–2052, (2004).
- [2] N. Chamel, P. Haensel, *Physics of Neutron Star Crusts*, Living Reviews in Relativity, 11, 10 (2008).
- [3] P. Haensel, A. Y. Potekhin, D. G. Yakovlev, *Neutron Stars 1 - Equation of State and Structure*, Springer Science, New York, USA (2006).
- [4] W. Baade, F. Zwicky, *Supernovae and cosmic rays*, Physical Review, 45, 138 (1934).
- [5] A. Hewish, S. J. Bell et al., *Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source*, Nature, 217, 709–713 (1968).
- [6] http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1974/
- [7] J. Antoniadis et al., *A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary*, Science, 340, 6131 (2013).
- [8] M. Pitkin, R. Stuart, S. Rowan, J. Hough, *Gravitational Wave Detection by Interferometry (Ground and Space)*, Living Reviews in Relativity, 14, 5 (2011).
- [9] J. M. Lattimer, M. Prakash, *Neutron star structure and the equation of state*, The Astrophysical Journal, 550, 426–442 (2001).
- [10] N. J. Bahcall, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 16, 241 (1978).
- [11] J. H. Taylor, J. M. Weisberg, *Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar PSR 1913+16*, The Astrophysical Journal, 345, 434 (1989).
- [12] F. M. Walter, S. J. Wolk, R. Neuhäuser, Nature, 379, 233 (1996).
- [13] R. Hoshi, *Mass-radius relations in X-Ray pulsars*, Proceedings of the SENS '90 Conference in Kyoto, Japan, 1990. Edited by D. Pines, R. Tamagaki, and S. Tsuruta. Redwood City, CA: Addison-Wesley, p. 98 (1992).
- [14] Credits: Chandra X-ray: NASA/CXC/B.Gaensler et al; ROSAT X-ray: NASA/ROSAT/Asaoka, Aschenbach; Radio Wide: NRC/DRAO/D.Leahy; Radio Detail: NRAO/VLA; Optical: DSS.
- [15] A. Tiengo et al., *A variable absorption feature in the X-ray spectrum of a magnetar*, Nature, 500, 312–314 (2013).

- [16] Credits: Bill Saxton, NRAO/AUI/NSF.
- [17] A. C. Phillips, *The Physics of Stars* (1994).
- [18] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars. The Physics of Compact Objects*, Strauss GmbH, Mörlenbach (2004).
- [19] C. Schwinger, *Classical Electrodynamics*, Perseus Books, Reading, Massachusetts (1998).
- [20] F. Weber, *Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia (1999).
- [21] V. Petit, G. A. Wade, L. Drissen, T. Montmerle, E. Alecian, *Discovery of two magnetic massive stars in the Orion Nebula Cluster: a clue to the origin of neutron star magnetic fields* (2008).
- [22] W. Voges et al., *Cyclotron lines in the hard X-ray spectrum of Hercules X-1*, The Astrophysical Journal, 263, 803–813 (1982).
- [23] D. B. Liu et al., *Further Analysis of Absorption Features in the X-Ray Spectrum of the Isolated Neutron Star 1E 1207.4-5209*, The Astrophysical Journal, 644, 439-444, (2006).
- [24] D. Lai, S. L. Shapiro, *Cold equation of state in a strong magnetic field – Effects of inverse beta-decay*, The Astrophysical Journal, 383, 745–751 (1991).
- [25] D. Prialnik, *An introduction to the theory of stellar structure and evolution* (2000).
- [26] W. Ho, C. Heinke, *A neutron star with a carbon atmosphere in the Cassiopeia A supernova remnant*, Nature, 462, 71–73 (2009).
- [27] V. E. Zavlin, G. G. Pavlov, Y. A. Shibano, *Model neutron star atmospheres with low magnetic fields*, Annual Review of Astronomy and Astrophysics (1996).
- [28] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9e/Neutron_star_cross_section.svg
- [29] G. Baym, C. Pethick, P. Sutherland, *The ground state of matter at high densities: equation of state and stellar models*, The Astrophysical Journal, 170, 299–317 (1971).
- [30] X. Roca-Maza, J. Piekarewicz, *Impact of the symmetry energy on the outer crust of nonaccreting neutron stars*, Physical Review, C78, 025807 (2008).
- [31] D. Peña Arteaga, M. Grasso, E. Khan, P. Ring, *Nuclear structure in strong magnetic fields: Nuclei in the crust of a magnetar*, Physical Review, C84, 045806 (2011).
- [32] C. A. Bertulani, *Nuclear Physics in a Nutshell*, Princeton University Press, USA (2007).
- [33] R. A. Coldwell-Horsfall, A. A. Maradudin, *Zero-Point Energy of an Electron Lattice*, Journal of Mathematical Physics, 1, 395 (1960).

-
- [34] J. Duflo, A. P. Zuker, *Physical Review*, C52 (1995).
 - [35] <http://amdc.impcas.ac.cn/evaluation/data2012/data/mass.mas12>
 - [36] J. Duflo, *Nucl. Phys. A*, 576, 29 (1994).
 - [37] A.P. Zuker, *Nucl. Phys. A*, 576, 65 (1994).
 - [38] V. Zelevinsky, *Quantum Physics, Volume 1: From Basic to Symmetries and Perturbations*, Strauss GmbH, Mörlenbach (2011).
 - [39] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Non-relativistic Theory*, Pergamon Press Ltd., UK (1977).
 - [40] I. I. Rabi, *Z. Phys.* 49, 507 (1928).
 - [41] S. B. Rüster, M. Hempel, J. Schaffner-Bielich, *Outer crust of nonaccreting cold neutron stars*, *Physical Review*, C73, 035804 (2006).
 - [42] C. J. Jog, R. A. Smith, *Mixed lattice phases in cold dense matter*, *The Astrophysical Journal*, 253, 839–841 (1982).