



Università degli Studi di Milano

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea Triennale in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Correzione al secondo ordine perturbativo dell'auto-energia per nucleoni in materia nucleare

Candidato:

Davide Rota

Matricola 813215

Relatore:

Prof. Gianluca Colò

Correlatore:

Dott. Xavier Roca-Maza

Indice

Introduzione	iii
1 Premesse e motivazioni sulla scelta del sistema	1
1.1 Proprietà nucleari	1
1.1.1 Densità di saturazione	1
1.1.2 Energia di saturazione	2
1.2 Particelle indipendenti	3
1.3 Materia nucleare simmetrica e omogenea	4
1.3.1 Funzione d'onda di singola particella	5
2 Teoria di campo medio	7
2.1 Modelli teorici per le interazioni a due corpi	7
2.1.1 Interazione di Skyrme	8
2.1.2 Interazione di Brink-Boeker	8
2.1.3 Interazione di Gogny	11
2.2 Energia del sistema a livello Hartree-Fock	11
2.3 Massa efficace in un modello Hartree-Fock	12
2.4 Risultati per un potenziale Brink-Boeker	15
2.4.1 Energia del sistema	16
2.4.2 Proprietà di singola particella	19
3 Secondo ordine perturbativo	21
3.1 Proprietà globali per il secondo ordine perturbativo	21
3.2 Proprietà di singola particella per il secondo ordine perturbativo	23
3.3 Risultati per un potenziale Brink-Boeker	25
3.3.1 Energia del sistema	26
3.3.2 Proprietà di singola particella	35
4 Conclusioni	43
A Metodo Hartree-Fock	45
B Teoria delle perturbazioni	48

Introduzione

Uno dei principali obiettivi della fisica è quello di determinare quantitativamente la dinamica dei sistemi di cui si occupa. In questo senso le conoscenze attuali permettono di risolvere alcuni problemi, tra i quali ad esempio quello del moto degli elettroni intorno al nucleo, dove il potenziale elettromagnetico è noto e mantiene il sistema legato, nel caso in cui gli elettroni siano pochi. Il problema a molti corpi è invece difficile da risolvere, anche quando l'interazione tra le particelle è nota. Nel caso del problema a molti nucleoni vi sono anche incertezze sull'interazione.

Il nucleo è quindi uno di quei sistemi per i quali non è ancora stato determinato un modello che ne descriva in maniera univoca la struttura dello stato fondamentale e lo spettro di eccitazione. La maggior parte delle trattazioni di questo problema partono da un potenziale a due corpi fenomenologico sulla cui base costruire un modello che sia in grado di rendere conto dei risultati empirici.

Ad oggi esistono sostanzialmente due metodi per costruire un'interazione a due (ed eventualmente a tre) corpi per i nucleoni:

- un possibile approccio, detto *ab initio*, modella l'interazione a partire da esperimenti di scattering tra nucleoni nel vuoto. Da un punto di vista prettamente teorico questo tipo di modelli sono i migliori, perchè il controllo sulla loro verosimiglianza viene posto, come ricorda il nome, all'inizio, cioè sulle interazioni fondamentali. Due esempi di teorie *ab initio* sono il potenziale CD-Bonn [1], oppure l'interazione Argonne v18 [2], che sfrutta i dati ricavati sia dalla diffusione n-n che n-p. Per i nuclei più leggeri, *e.g.* il deutone, ^3He e ^4He , è possibile effettuare un calcolo microscopico esatto partendo da queste interazioni a due corpi; se invece il numero di nucleoni diventa maggiore di 4 è necessario adottare soluzioni approssimate, ottenute grazie a metodi come il Quantum Monte Carlo [3], il metodo Green's Function Monte Carlo [4], il No-Core Shell Model [5];
- Il grande svantaggio dei modelli di cui si è parlato al punto precedente è dato dal grande costo computazionale, che spesso rende la mole dei calcoli da affrontare insostenibile anche per i moderni calcolatori. Conviene allora abbandonare questo tipo di approccio e ricercare delle vie

alternative che raggiungano un buon compromesso tra capacità predittive e tempi di calcolo. Si può allora pensare di scegliere un potenziale a due corpi, dipendente da un certo numero di parametri, in modo tale che simuli delle simmetrie sull'interazione mutua tra nucleoni e che riproduca dei dati sperimentali, come per esempio l'energia del sistema. Un potenziale di questo tipo, detto *ad hoc*, non tiene perciò conto dell'interazione NN, poichè il valore quantitativo dei parametri che lo caratterizzano viene determinato imponendo dei vincoli sul risultato finale, che dipende dalla teoria in cui si va a collocare l'interazione a due corpi. Alcuni esempi di potenziale *ad hoc* sono le forze di Skyrme [6], Gogny [7] e Brink&Boeker [8], che verranno introdotte nel corso del lavoro. Questi potenziali vengono poi utilizzati nell'ambito della teoria *autoconsistente di campo medio* (SCMF) di Hartree-Fock (HF), un modello a particelle indipendenti in cui un potenziale efficace statico sostituisce tutte le interazioni tra le particelle trasformando di fatto un problema ad A corpi in tanti problemi ad un corpo.;

Nel presente elaborato vengono mostrati i risultati ottenuti calcolando le proprietà globali e di singola particella per un sistema di materia nucleare uniforme, ottenuti utilizzando il secondo approccio a partire da un potenziale di tipo Brink&Boeker. Il potenziale efficace così ottenuto, che a causa natura fermionica dei nucleoni presenta una dipendenza dal momento di questi ultimi, permette di ottenere un'equazione di stato (EoS), che in generale dipende dalla densità del sistema, sommando sull'energia di tutte le particelle considerate. Ovviamente bisogna tenere presente che quello Hartree-Fock non è l'unico schema autoconsistente nè il più raffinato: tra le possibili alternative citiamo a titolo di esempio il metodo del funzionale densità proposto da Kohn e Sham nel 1965 [9].

A partire dalla seconda metà del secolo scorso il metodo HF è stato indagato in moltissime situazioni differenti che hanno fatto emergere dei limiti strettamente legati all'approssimazione adottata. Si è pensato quindi di abbandonare l'idea di un potenziale statico e di considerare esplicitamente gli effetti di correlazione nel moto delle particelle estendendo il calcolo perturbativo al secondo ordine. Anche in questo caso, come in approssimazione HF, verranno mostrati in questa tesi l'equazione di stato in materia nucleare al secondo ordine perturbativo e la forma del potenziale che governa il moto delle singole particelle. Infine, come per il primo ordine perturbativo, verranno mostrati i risultati numerici ottenuti adottando un'interazione a due corpi del tipo Brink&Boeker.

Capitolo 1

Premesse e motivazioni sulla scelta del sistema

In questo capitolo, dopo un breve riassunto di alcune proprietà nucleari notevoli, vengono presentate funzione d'onda e Hamiltoniana per un sistema di nucleoni in approssimazione di particelle indipendenti (IPA). Viene poi data una descrizione della materia nucleare simmetrica ed omogenea e delle motivazioni che hanno determinato la scelta del sistema e del modello.

1.1 Proprietà nucleari

1.1.1 Densità di saturazione

Gli esperimenti di scattering elettronico su diversi nuclei sferici hanno permesso di ricavare per ognuno di essi la distribuzione di carica radiale dei nucleoni $\rho(r)$. Osservando la figura 1.1 su cui sono riportati alcuni risultati, si possono notare due particolarità:

1. la densità di nucleoni rimane costante indipendentemente dal numero di nucleoni entro una certa distanza dal centro del nucleo, per poi cominciare a diminuire fino ad annullarsi seguendo un andamento di tipo Woods-Saxon, ovvero

$$\rho(r) = \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}, \quad (1.1)$$

con R pari al raggio del nucleo¹, a parametro che definisce la superficie nucleare ($a \approx 0.5$ fm [18]);

2. la densità per i nucleoni più interni non dipende da A per la maggior parte dei nuclei, ad eccezione di quelli più leggeri, ma è costante e pari a $\rho_0 \sim 0.16 \text{ fm}^{-3}$.

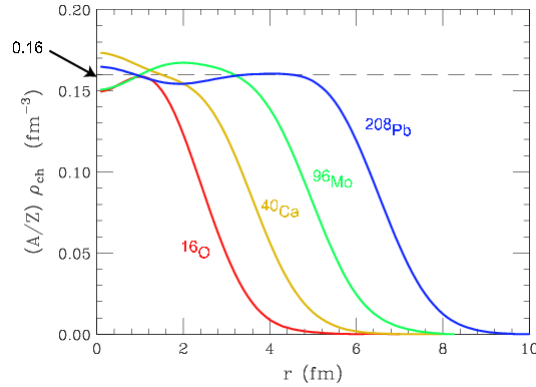


Figura 1.1: Densità di nucleoni per alcuni nuclei [10].

La seconda proprietà ci fornisce una notevole indicazione circa le modalità di interazione tra nucleoni all'interno del nucleo, e cioè che una particella interagisce solo con le sue prime vicine: le forze nucleari sono a corto range, dunque trascurando la repulsione coulombiana tra protoni non agiscono per nucleoni eccessivamente distanti. La condizione che si viene così a creare, detta di *saturazione*, genera nelle regioni interne del nucleo una densità costante dei nucleoni ρ_0 chiamata *densità di saturazione*.

Se trascuriamo la *pelle* del nucleo, ipotizzando una densità costante in tutto il volume Ω occupato, quest'ultimo è proporzionale al numero di massa A , e vale la relazione

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}}, \quad r_0 \approx 1.2 \text{ fm}, \quad (1.2)$$

con R raggio del nucleo ed r_0 valore costante ricavato empiricamente [11], che ci permette a sua volta di ricavare la distanza media tra nucleoni, dell'ordine di 1 fm.

1.1.2 Energia di saturazione

Uno dei modelli più semplici all'interno dei quali è possibile trovare interpretazione per i risultati sperimentali riguardanti l'energia di legame in un nucleo è sicuramente la formula semiempirica di massa proposta da Bethe e Weizsäcker sulla base del modello a goccia[11]:

$$E(N, Z) = a_\Omega A + a_s A^{\frac{2}{3}} + a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_{sym} \frac{(N - Z)^2}{A} - \delta(A), \quad (1.3)$$

$$a_\Omega = -15.85 \text{ MeV}, \quad a_s = 18.34 \text{ MeV}, \quad a_c = 0.71 \text{ MeV}, \quad (1.4)$$

¹Il valore di R viene definito successivamente

$$a_{sym} = 23.21 \text{ MeV}, \quad \delta(A) = \pm 12A^{-\frac{1}{2}} \text{ MeV}, \quad (1.5)$$

dove

- il primo termine è detto *di volume*, poichè $A \propto r^3$, e rappresenta il contributo all'energia dell'interazione per i nucleoni più interni;
- il secondo addendo, detto termine *di superficie* in quanto proporzionale ad $A^{\frac{2}{3}} (\propto r^2)$, è una correzione al primo termine dovuta al fatto che i nucleoni presenti in prossimità della superficie nucleare contribuiscono all'energia di legame in maniera minore rispetto a quelli interni;
- la repulsione coulombiana è responsabile del contributo proporzionale a $Z^2/A^{1/3} (\propto r^{-1})$. Questo contributo favorisce una configurazione in cui $N > Z$ per nuclei pesanti;
- il penultimo termine, detto di *simmetria*, fa sì che l'energia di legame aumenti per configurazioni in cui si ha $Z=N$. È molto importante nei nuclei più leggeri, mentre per quelli più pesanti l'aumento della repulsione coulombiana richiede un numero di neutroni maggiore;
- L'ultimo termine, detto termine di *pairing* può essere maggiore, minore o uguale a zero a seconda del numero di protoni e neutroni. Sperimentalmente infatti si osserva che i nuclei in cui il numero di protoni e quello di neutroni è pari hanno una maggiore stabilità;

1.2 Particelle indipendenti

Il modello a particelle indipendenti (IPA) è un metodo di approssimazione attraverso il quale una base nello spazio degli stati per A particelle viene trattata come il prodotto di N stati di singola particella indipendenti. In realtà per un sistema di fermioni come lo sono i nucleoni occorre tenere conto del principio di Pauli, che impedisce a due particelle di occupare lo stesso stato: lo stato totale deve essere antisimmetrico sotto permutazione di particelle, per cui in realtà il moto di ognuna di esse dipende anche da quello delle altre. Uno degli esempi più celebri tra i modelli a particelle indipendenti è rappresentato dal metodo autoconsistente di Hartree-Fock, descritto in dettaglio in appendice A. Il modello a particelle indipendenti costituisce un ottimo punto di partenza per l'applicazione di numerose tecniche volte a determinare le proprietà di un sistema a molti corpi, come la teoria perturbativa descritta in appendice B.

²Forma funzionale ricavata dall'espressione per l'energia elettrica di un nucleo assumendo una distribuzione omogenea di protoni.

L'Hamiltoniana per un sistema a molti corpi in assenza di un potenziale esterno è definita, nel modello IPA, da

$$H = T + V \quad (1.6)$$

$$= - \sum_i^N \frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N v(i, j), \quad (1.7)$$

dove $v(i, j)$ è il potenziale a due corpi attraverso il quale interagiscono le particelle i -esima e j -esima. Questi potenziali possono avere forme diverse costruite sulla base di evidenze sperimentali. Nel paragrafo 2.1 ne verranno presentati alcuni in dettaglio. È evidente che mentre da una parte il termine cinetico agisce esclusivamente sulla i -esima particella, il termine di potenziale coinvolge tutte le particelle del sistema e la sua soluzione non è banale.

Come detto all'inizio di questo paragrafo, per un sistema di fermioni come quello che andremo a considerare la funzione d'onda globale è data dal prodotto antisimmetrizzato degli autostati di singola particella e assume la forma di un determinante di Slater:

$$\Phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma} (-1)^{\pi} P_{\sigma}(\phi_1 \dots \phi_N), \quad (1.8)$$

in cui la somma in (1.8) viene effettuata su tutte le possibili permutazioni degli stati di singola particella ϕ_i generate dall'operatore di scambio della coppia di stati di singola particella P_{σ} . Senza perdere in generalità possiamo poi scegliere gli stati ϕ_i in modo tale che essi formino un insieme completo e ortonormale, imponendo la condizione $\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij}$.

1.3 Materia nucleare simmetrica e omogenea

Descrivere la dinamica interna di un nucleo può risultare un'impresa assai ardua, infatti a causa dei numerosi effetti che concorrono all'interazione tra nucleoni sia le funzioni d'onda che l'Hamiltoniana diventano oggetti molto complicati con cui lavorare. La situazione può essere notevolmente semplificata affrontando il problema in *materia nucleare simmetrica omogenea*, un sistema ideale in cui vengono trascurati alcuni termini di (1.3):

1. sia Ω il volume del nucleo. Se esso è sufficientemente grande si possono considerare trascurabili, nel limite in cui questo tende a infinito, il contributo degli effetti di superficie e anche di pairing, se lavoriamo con il modello dell'equazione (1.3);
2. assumendo un numero di protoni equivalente a quello dei neutroni ($Z = N = A/2$), il termine di simmetria si annulla. Questa condizione è verificata anche per nuclei reali con $A \leq 50$, dove il contributo coulombiano diventa rilevante rispetto a quello di simmetria;

3. trascurando il contributo coulombiano all'energia, si annulla il terzo termine dell'equazione (1.3);
4. la distribuzione della densità può essere considerata costante (omogeneità), come in effetti avviene all'interno dei nuclei reali.

Grazie a queste assunzioni l'unico termine a non essere soppresso in (1.3) è quello relativo al contributo del volume, proporzionale ad A , e l'energia di legame per nucleone diventa quindi una quantità costante che prescinde dal numero di particelle componenti il sistema.

La materia simmetrica è dunque un sistema ideale il cui studio rappresenta però un buon punto di partenza per capire le proprietà nucleari che non coinvolgono la superficie o l'eccesso di neutroni, e in alcuni casi è anche in grado di fornire informazioni circa alcuni sistemi reali, come accade per una parte del profilo di densità delle stelle di neutroni.

Per materia nucleare, l'energia per nucleone al punto di saturazione diventa [12]

$$e(\rho_0) = -16.0 \pm 0.1 \text{ MeV}. \quad (1.9)$$

1.3.1 Funzione d'onda di singola particella

Sia Ω un volume di materia nucleare simmetrica e omogenea di lato L . Grazie alle proprietà di omogeneità e simmetria il sistema è invariante per traslazioni e il momento è una costante del moto. Possiamo dunque scegliere di diagonalizzare l'Hamiltoniana insieme al momento sugli autostati di quest'ultimo, rappresentati da onde piane, che nello spazio delle coordinate assumono la forma³

$$\phi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{k} \rangle = \frac{1}{\Omega} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (1.10)$$

Le condizioni al contorno applicate alle estremità del volume impongono che al momento $\vec{k}$ sia permesso di assumere solo valori discreti tali che

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} \vec{n}. \quad (1.11)$$

Da qui, ricavando che la densità degli stati è pari a $\Omega/(2\pi)^3$, posso sfruttare questa condizione e convertire le sommatorie sui momenti in integrali, considerato il gran numero di stati per unità di volume:

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k}. \quad (1.12)$$

³In realtà l'autostato che descrive la particella è dato da $|\vec{k}, \sigma m_\sigma, \tau m_\tau\rangle = (|\vec{k}\rangle \otimes |\sigma m_\sigma\rangle \otimes |\tau m_\tau\rangle)$, dove $|\sigma m_\sigma\rangle$ e $|\tau m_\tau\rangle$ sono rispettivamente gli autostati di spin e isospin del nucleone.

A causa della natura fermionica due nucleoni non possono occupare lo stesso stato quantico, pertanto i valori dei momenti $\vec{k}$ per lo stato fondamentale sono i più piccoli possibili tali per cui questo principio viene rispettato. L'insieme dei $\vec{k}$ è costituito da una sfera di raggio $|\vec{k}|$ nello spazio dei momenti, la cui superficie è definita dal valore massimo consentito, detto momento di Fermi ($k_f = |\vec{k}|_{max}$). Esiste un'equazione che lega il momento di Fermi e la densità delle particelle: sapendo che

$$\rho\Omega = A = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \left(\sum_{\sigma,\tau} \mathbb{1} \right) \int_{|\vec{k}| < k_f} d^3\vec{k}, \quad (1.13)$$

,dove la somma è da intendersi sulle componenti lungo l'asse $\hat{z}$, attraverso semplici calcoli si ottiene

$$\rho = \frac{2}{3\pi^2} k_f^3. \quad (1.14)$$

Capitolo 2

Teoria di campo medio

Uno dei principali obiettivi nello studio di un sistema a molti corpi è quello di descrivere la dinamica dei singoli elementi che lo compongono. La soluzione esatta a questo problema è molto difficile da trovare, tuttavia esistono dei sistemi, tra i quali alcuni di ioni ed elettroni, per cui sono stati elaborati dei modelli la cui predittività è molto elevata. In materia nucleare, un buon metodo per descrivere le interazioni di una particella con il sistema che la circonda è quello di trattare l'effetto che le altre particelle generano su di essa come un potenziale efficace che sia mediato su tutte le possibili interazioni a due corpi.

In questo capitolo verrà per prima cosa mostrato qualche esempio di potenziale a due corpi, in particolare il potenziale Brink&Boeker, utilizzato nell'ultima parte del capitolo per mostrare alcuni risultati numerici. Successivamente verrà trattato lo studio delle proprietà globali e di singola particella, con particolare riguardo al concetto di massa efficace, quantità strettamente legata alle proprietà di singola particella. Per finire, come anticipato, verranno mostrati alcuni risultati ottenuti applicando un potenziale a due corpi di tipo Brink&Boeker.

2.1 Modelli teorici per le interazioni a due corpi

Le interazioni a due corpi prese come punto di partenza nel calcolo del potenziale efficace possono essere calcolate adottando potenziali costruiti sulla base di diversi modelli. Alcuni di essi, detti *ab initio*, definiscono un'interazione realistica prendendo come punto di partenza alcune proprietà ricavate da esperimenti di scattering tra nucleoni nel vuoto. Tuttavia, il costo computazionale di tali metodi comincia a diventare molto pesante già per nuclei con A superiore a 10/20: conviene quindi adottare un altro tipo di approccio, in cui si costruisce un potenziale *ad hoc* dipendente da un numero variabile di parametri, definiti in modo tale che l'interazione effettiva, calcolata in un modello a campo medio, sia in grado di riprodurre

determinate proprietà nucleari.

Di seguito vengono presentati alcuni di questi potenziali, in particolare il potenziale di Brink&Boeker, che verrà utilizzato nel presente lavoro per mostrare alcuni risultati numerici.

2.1.1 Interazione di Skyrme

Negli anni '50 Skyrme propose un modello di interazione a due corpi che in materia nucleare simmetrica assume la forma[18][6]

$$\begin{aligned} v_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = & t_0(1 + x_0)\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ & + \frac{1}{2}t_1 [\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)k^2 + k^2\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] + t_2\vec{k}\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\vec{k}, \\ & + \frac{t^3}{6}(1 + P_\sigma)\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\rho, \end{aligned} \quad (2.1)$$

con t_0, t_1, t_2, t_3, x_0 parametri e ρ densità del sistema. P_σ è invece l'operatore di scambio degli spin definito come

$$P_\sigma = \frac{1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{2}. \quad (2.2)$$

Questo potenziale è composto da tre termini: il primo e il secondo termine descrivono una forza a range zero pura; il terzo termine contiene la dipendenza di questo potenziale dalla densità del sistema, ed è ottenuto a partire da un potenziale a tre corpi mediato su una delle tre particelle.

Nonostante sia un modello abbastanza elementare, il potenziale di Skyrme viene spesso utilizzato per la sua semplicità e per la capacità di riprodurre quantitativamente osservabili empiriche come le energie di legame lungo tutta la tavola periodica[14].

2.1.2 Interazione di Brink-Boeker

Brink e Boeker in un articolo del 1966 [8] proposero un modello di potenziale a due corpi della forma

$$v'_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{i=1,2} S_i(1 - m_i + m_i P_M) e^{-\frac{r_i^2}{\mu_i^2}}, \quad (2.3)$$

dove P_M è l'operatore di scambio dei momenti per due particelle, definito in maniera tale che

$$P_M \phi_k(\vec{r}_1) \phi_l(\vec{r}_2) = \phi_l(\vec{r}_1) \phi_k(\vec{r}_2), \quad (2.4)$$

$$P_M^2 = \mathbb{1}. \quad (2.5)$$

Il motivo di questa scelta fu la volontà di riprodurre tre regioni dipendenti dalla distanza r tra nucleoni, definite dai due range μ_1 e μ_2 : una prima regione, a una distanza $r > \mu_1$, in cui gli effetti dell'interazione sono trascurabili; una zona con $\mu_2 < r < \mu_1$, in cui il potenziale ha un carattere attrattivo; infine una terza regione ($r < \mu_2$) che modella il carattere fortemente repulsivo dell'interazione a piccole distanze. I parametri vengono fissati in base al sistema e ai vincoli considerati, e in generale ci si aspetta per i range dei valori intorno a $\mu_1 \approx 0.8 - 1.4 \text{ fm}$, $\mu_2 \approx 0.4 - 0.7 \text{ fm}$

In questo lavoro viene considerata una forma semplificata di potenziale Brink&Boeker (BB) con una sola Gaussiana:

$$v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = S(1 - m + mP_M)e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}. \quad (2.6)$$

Il doppio carattere, attrattivo e repulsivo, del potenziale non viene più riprodotto dall'interazione a due corpi nel caso di un potenziale semplificato con un solo range, tuttavia la motivazione che ci spinge ad adottare questa soluzione è data dal fatto che tale comportamento viene riprodotto dalla presenza di un termine di scambio per un potenziale Hartree-Fock. Si possono ottenere i tre parametri S, m e μ imponendo delle condizioni tali per cui siano rispettati alcuni vincoli calcolati alla densità di saturazione ρ_0 . Di seguito vengono proposte alcune grandezze utilizzate a questo scopo:

1. l'energia per nucleone (1.9);
2. la pressione del sistema

$$P(\rho_0) = \rho^2 \left. \frac{\partial e}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}. \quad (2.7)$$

Il fatto che la pressione debba essere nulla risulta ovvio considerando che la condizione di saturazione rappresenta un punto di equilibrio stabile per la materia nucleare, quindi la sua derivata prima rispetto alla densità si annulla necessariamente per $\rho = \rho_0$;

3. l'incompressibilità: definiamo in primo luogo la compressibilità χ come la risposta del volume del sistema a piccole variazioni di pressione,

$$\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)^{-1} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)^{-1}. \quad (2.8)$$

Per un sistema in cui la temperatura $T = 0$ e il numero di particelle A rimane costante, come accade per materia nucleare infinita, la pressione è legata all'energia per nucleone e :

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho}, \quad (2.9)$$

perciò, servendoci delle ultime due equazioni otteniamo l'inverso della compressibilità in funzione della densità:

$$\begin{aligned}\chi^{-1}(\rho) &= \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \\ &= 2\rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} + \rho^3 \frac{\partial^2 e}{\partial \rho^2}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Sfruttando la condizione (2.7), l'espansione di Taylor dell'energia per nucleone intorno al suo minimo diventa:

$$e(\rho) = e(\rho_0) + \frac{1}{18} K_\infty \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 + \mathcal{O}((\rho - \rho_0)^2), \quad (2.11)$$

e l'incompressibilità può essere quindi definita come la quantità¹

$$K_\infty = 9 \rho^2 \frac{\partial^2 e}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} \quad (2.12)$$

$$= \frac{9}{\rho_0} \chi^{-1} \quad (2.13)$$

$$= 240 \pm 40 \text{ MeV}. \quad (2.14)$$

Si può estendere la nozione di incompressibilità ad ogni valore della pressione:

$$K_\rho = 9 \rho^2 \frac{\partial^2 e}{\partial \rho^2} \Big|_\rho. \quad (2.15)$$

Dal punto di vista fisico si può pensare a questa grandezza, che ricordiamo essere direttamente proporzionale alla derivata seconda dell'energia per nucleone, come al lavoro necessario ad allontanare il sistema dalla condizione di saturazione.

4. la *Risonanza Gigante di Monopolo* (GMR) è una risonanza nucleare che misura il modo di compressione dei nuclei finiti ed è direttamente collegata all'incompressibilità.

Secondo il modello di Blaizot[23] l'incompressibilità può essere calcolata, per quanto riguarda i nuclei finiti, grazie a un'espansione a goccia liquida simile a quella utilizzata da Bethe e Weizsäcker per l'energia di legame (1.3):

$$K_A \approx K_{vol} + K_{surf} A^{-\frac{1}{3}} + K_{coul} \frac{Z^2}{A^{\frac{4}{3}}} + K_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A^2}, \quad (2.16)$$

dove il primo termine è il contributo di volume corrispondente all'incompressibilità per la materia nucleare infinita K_∞ , mentre K_{coul} e

¹Si è assunta un'incertezza del 20% sul valore ottenuto [19].

K_{sym} sono rispettivamente i coefficienti legati all'interazione Coulombiana e di simmetria, nulli in materia nucleare. Il secondo termine contiene il contributo della superficie all'energia, e il coefficiente K_{surf} può essere pensato approssimativamente come proporzionale alla derivata del termine di volume, valutato per densità caratteristiche dello spessore di bordo nucleare, $\rho_c \approx 0.7\rho_0$. Come è possibile osservare nella referenza [20], la quantità

$$M(\rho_c) = 3 \rho \frac{\partial K}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_c} \quad (2.17)$$

$$= 27\rho_c \left(2 \frac{\partial e}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_c} + 4\rho_c \frac{\partial^2 e}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_c} + \rho_c^3 \frac{\partial^3 e}{\partial \rho^3} \Big|_{\rho=\rho_c} \right) \quad (2.18)$$

$$= 54 \frac{P(\rho_c)}{\rho_c} + 12K(\rho_c) + Q(\rho_c) \quad (2.19)$$

$$= 1100 \pm 70 MeV \quad (2.20)$$

ha un'incertezza relativa inferiore rispetto quella dell'incompressibilità. Ciò è dovuto al fatto che M è derivabile dagli esperimenti con una precisione migliore di K , in quanto il suo valore in corrispondenza di ρ_c è quasi indipendente dal modello teorico considerato.

2.1.3 Interazione di Gogny

L'interazione di Gogny può essere considerata come uno sviluppo del modello BB in cui oltre al potenziale a doppia gaussiana, è presente un termine a range zero in cui è resa esplicita la dipendenza dalla densità[7]:

$$v_G(\vec{r}, \rho) = \sum_{i=1,2} (W_i + B_i P_\sigma - H_i P_\tau - M_i P_\sigma P_\tau) e^{-\frac{r^2}{\mu_i}} + t_0 (1 + P_\sigma) \rho^\alpha \delta(\vec{r}), \quad (2.21)$$

dove $W_i, B_i, H_i, M_i, t_0, \alpha$ sono parametri costanti e gli operatori P_σ e P_τ sono definiti in modo analogo a (2.2)². Il primo termine di (2.21) include la dipendenza da un doppio range finito analogo al potenziale Brink&Boeker (2.3), dove μ_i assumono i valori $\mu_1 \approx 0.5 - 0.7$ fm, $\mu_2 \approx 1 - 1.2$ fm. Il secondo termine è formato da un contributo a range zero e dipendente dalla densità che tiene conto delle correlazioni a due corpi.

2.2 Energia del sistema a livello Hartree-Fock

Si è detto nei capitoli precedenti che lo studio di un problema ad N corpi può essere notevolmente semplificato assumendo che il nucleone si muova

² P_τ è l'operatore di scambio degli isospin.

all'interno di un potenziale medio generato dalla presenza di tutte le altre particelle. Il metodo di campo medio descritto nel seguente lavoro è il metodo autoconsistente³ di Hartree-Fock, discusso in dettaglio in appendice A. Il punto di partenza è l'Hamiltoniana a molti corpi (1.6) in approssimazione a particelle indipendenti, dove lo stato del sistema è descritto dal determinante di Slater antisimmetrizzato (1.8).

L'energia del sistema assume dunque la forma

$$E = \langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | T | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | V | \Phi_0 \rangle, \quad (2.22)$$

dove

$$\langle \Phi_0 | T | \Phi_0 \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_k \langle k | \nabla_k^2 | k \rangle, \quad (2.23)$$

$$\langle \Phi_0 | V | \Phi_0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \neq l}^N \langle kl | v(\vec{r}_1, \vec{r}_2) | kl - lk \rangle \quad (2.24)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k \neq l}^N \langle kl | v(\vec{r}_1, \vec{r}_2) (1 - P_{kl}) | kl \rangle, \quad (2.25)$$

in cui $P_{kl} = P_M P_\sigma P_\tau$ è l'operatore di scambio per le particelle k e l . $v(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ è invece un potenziale a due corpi di cui alcuni esempi sono stati riportati nel paragrafo 2.1.

2.3 Massa efficace in un modello Hartree-Fock

Il problema di determinare la dinamica dei singoli elementi che compongono la materia nucleare si traduce nella seguente equazione di Schrödinger[28]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_k(\vec{r}, t) + \int d^3 \vec{r}' \int dt' v(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \phi_k(\vec{r}', t') = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi_k(\vec{r}, t), \quad (2.26)$$

dove $v(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$ è la forma più generale possibile del potenziale a due corpi su cui costruisco il potenziale efficace in maniera autoconsistente.

È necessario innanzitutto introdurre il concetto di *nonlocalità*, che è la caratteristica per cui volendo calcolare la funzione d'onda di singola particella $\phi(\vec{r}, t)$ nella posizione $\vec{r}$ e al tempo t è necessario conoscere le $\phi(\vec{r}', t')$ nelle altre posizioni $\vec{r}'$ e tempi t' [28][17]. Poichè nelle interazioni tra nucleoni

³Un metodo autoconsistente è un processo iterativo in cui, dato un insieme completo di autofunzioni di prova di singola particella, si ottiene, nel caso in cui l'iterazione del processo porti alla convergenza, un nuovo set di autofunzioni che descrive meglio lo stato del sistema e un potenziale efficace costruito sulla base di questi nuovi stati. In realtà, per materia nucleare simmetrica le autofunzioni di singola particella sono onde piane ed essendo quindi note a priori il potenziale è l'unico obiettivo dei calcoli.

l'Hamiltoniana deve essere invariante per traslazione temporale, la nonlocalità temporale si risolve in una dipendenza di v da $|t - t'|$. Un ragionamento analogo può essere fatto per quanto riguarda la nonlocalità nello spazio in un sistema omogeneo, qual è la materia nucleare: l'invarianza traslazionale riduce la dipendenza di v da $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ a $|\vec{r} - \vec{r}'|$. Nel caso di uno stato stazionario in materia uniforme l'autofunzione sarà della forma:

$$\phi_k(\vec{r}, t) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\omega t}, \quad (2.27)$$

cosa che consente di trattare il secondo termine del membro di sinistra di (2.26) come la trasformata di Fourier di v rispetto a tempo e posizione, che indichiamo $\Sigma(\vec{k}, \omega)$ e chiamiamo con il nome di *auto-energia*. In questo modo la (2.26) diventa:

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \Sigma(\vec{k}, \omega). \quad (2.28)$$

Una particolarità sorprendente dei sistemi formati da molte particelle è che spesso si può ipotizzare, in maniera lecita, che essi non siano costituiti da oggetti fortemente interagenti tra loro, come in realtà accade, ma da corpi virtuali, tra i quali non vi è mutua interazione, o è molto debole. Questo schema trae giustificazione dal fatto che quando una particella reale si muove in mezzo alle altre, l'interazione con queste ultime genera una “nube” di corpi che la circonda. La quasiparticella è dunque quell'oggetto virtuale, formato dalla particella reale e dalla nube che la circonda, la cui interazione con le altre particelle virtuali è trascurabile. Ovviamente questa non è una configurazione che si verifica effettivamente, tuttavia le risposte che questa rappresentazione ideale fornisce sono spesso soddisfacenti. In questa approssimazione si può scrivere

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}, \quad (2.29)$$

dove m^* , detta massa efficace, è la massa della quasiparticella, o analogamente la massa che la particella reale avrebbe se possedesse un'energia puramente cinetica.

Come si può capire guardando la (2.29), la massa efficace m^* è una quantità di particolare importanza, poichè ad essa è direttamente legata alla densità dei livelli energetici. In linea di principio questa quantità dipende da due grandezze: il momento e la frequenza, quantità direttamente collegata all'energia⁴ della particella ($\Sigma = \Sigma(k, \omega)$). Infine è importante osservare che grazie all'invarianza traslazionale di questo sistema Σ dipende unicamente da $k = |\vec{k}|$. L'espressione della massa efficace viene ricavata confrontando

⁴ $\epsilon = \hbar\omega$.

le energie della particella reale (2.28) e di quella virtuale (2.29). Derivando tali espressioni

$$\frac{d\epsilon(k)}{dk} = \left(\frac{\hbar^2 k}{m} + \frac{d\Sigma(k, \omega)}{dk} \right) \left(1 - \frac{d\Sigma(k, \omega)}{d\omega} \right)^{-1}, \quad (2.30)$$

$$\frac{d\epsilon(k)}{dk} = \frac{\hbar^2 k}{m^*}, \quad (2.31)$$

ed eguagliandole, si ottiene:

$$\frac{\hbar^2 k}{m^*} = \left(\frac{\hbar^2 k}{m} + \frac{d\Sigma(k, \omega)}{dk} \right) \left(1 - \frac{d\Sigma(k, \omega)}{d\omega} \right)^{-1} \quad (2.32)$$

$$\frac{m}{m^*}(k, \omega) = \left(1 + \frac{m}{\hbar^2 k} \frac{d\Sigma(k, \omega)}{dk} \right) \left(1 - \frac{d\Sigma(k, \omega)}{d\omega} \right)^{-1}, \quad (2.33)$$

fino al risultato

$$\frac{m^*}{m}(k, \omega) = \frac{m_k(k)}{m} \frac{m_\omega(\omega)}{m}, \quad (2.34)$$

$$= \left(1 + \frac{m}{\hbar^2 k} \frac{d\Sigma(k, \omega)}{dk} \right)^{-1} \left(1 - \frac{d\Sigma(k, \omega)}{d\omega} \right), \quad (2.35)$$

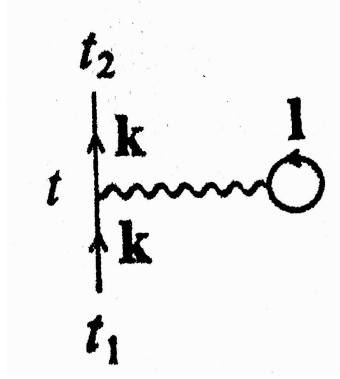
avendo ridefinito i due termini nell'ultimo passaggio per mettere in evidenza le rispettive dipendenze.

Vi sono diverse strade per ricavare la forma precisa della auto-energia⁵. Nel presente elaborato vengono mostrati i risultati ottenuti facendo uso della teoria di campo medio e di quella perturbativa all'ordine successivo. Ci concentriamo ora sulla forma della massa efficace per un potenziale Hartree-Fock.

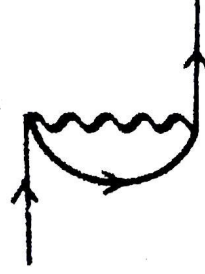
Dato un sistema ipotetico su cui non agisce alcun potenziale esterno, come ad esempio la materia nucleare, è possibile ottenere la forma analitica dell'auto-energia in approssimazione HF facendo uso del metodo dei diagrammi di Feynman, una rappresentazione pittorica delle interazioni tra particelle. In questa approssimazione tra le interazioni contemplate dominano quelle di *scattering*, in cui due particelle di momento e posizione $(\vec{k}, \vec{r}_1)$ e $(\vec{l}, \vec{r}_1)$, dopo aver interagito emergono con momento pari a quello precedente l'interazione (termine diretto) o con i momenti scambiati (termine di scambio).

In figura 2.1 sono riportati i diagrammi relativi al caso diretto e di scambio per l'autoenergia risolta a livello HF. Risulta dunque che il termine di auto-energia è composto da due termini, di cui il primo diretto ($\Sigma_{HF,d}$) e il

⁵E di conseguenza della massa efficace



(a) Termine diretto



(b) Termine di scambio

Figura 2.1: Diagrammi per l' auto-energia in approssimazione Hartree-Fock

secondo di scambio ($\Sigma_{HF,e}$) ⁶:

$$\Sigma_{HF} = \Sigma_{HF,d} + \Sigma_{HF,e} = \sum_l V_{klkl} + \sum_l (-) V_{kllk} \quad (2.36)$$

$$= \left[\sum_{\sigma_l} \delta_{\sigma_k \sigma_k} \cdot \delta_{\sigma_l \sigma_l} \right] \cdot \left[\sum_{\tau_l} \delta_{\tau_k \tau_k} \cdot \delta_{\tau_l \tau_l} \right] \cdot \sum_{|\vec{l}| < k_f} V_{klkl} \quad (2.37)$$

$$+ \left[\sum_{\sigma_l} \delta_{\sigma_k \sigma_l} \cdot \delta_{\sigma_l \sigma_k} \right] \cdot \left[\sum_{\tau_l} \delta_{\tau_k \tau_l} \cdot \delta_{\tau_l \tau_k} \right] \cdot \sum_{|\vec{l}| < k_f} (-) V_{kllk}, \quad (2.38)$$

che, una volta valutati i contributi numerici delle somme su spin e isospin, diventa

$$\Sigma_{HF} = 4 \sum_{l < k_f} V_{klkl} + \sum_{l < k_f} (-) V_{kllk}. \quad (2.39)$$

2.4 Risultati per un potenziale Brink-Boeker

In questo paragrafo si fa uso di un potenziale a due corpi della forma

$$v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = S_i (1 - m + m P_M) e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}, \quad (2.40)$$

già anticipato nel paragrafo 2.1.2, per calcolare l'energia totale e quella associata ai singoli nucleoni in materia nucleare in un modello Hartree-Fock.

⁶Come evidenziato nel capitolo 1.3 gli stati su cui eseguo la sommatoria sono definiti dai tre numeri quantici di momento $\vec{l}$, spin σ_l e isospin τ_l .

2.4.1 Energia del sistema

Per prima cosa occorre calcolare i due termini mostrati in (2.23-2.25) rappresentanti il contributo cinetico e potenziale all'energia. Quest'ultimo, a causa dell'operatore di scambio P_M , è formato da due contributi.

Termine cinetico

Ricordando che per materia nucleare simmetrica le funzioni d'onda di singola particella sono onde piane, ricordando che le somme possono essere estese ad integrali sfruttando (1.12), e che il volume di integrazione sui momenti Ω_k è una sfera di raggio k_f , si ottiene

$$\begin{aligned}
 \langle T \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m_N} \sum_i \langle k | \nabla_{\vec{r}}^2 | k \rangle \\
 &= -\frac{4\Omega}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{2m_N} \int_{\Omega_k} d^3\vec{k} \int_{\Omega} d^3\vec{r} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{\Omega}} \nabla_{\vec{r}}^2 \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{\Omega}} \\
 &= \frac{4\Omega}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{2m_N} 4\pi \int_0^{k_f} k^4 \\
 &= \frac{\Omega \hbar^2}{5\pi^2 m_N} k_f^5,
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

dove m_N è la massa del nucleone, media aritmetica tra le masse di protone e neutrone. Ricordando che il momento di Fermi è legato alla densità tramite

$$k_f = \left(\frac{3\pi^2}{2} \rho \right)^{\frac{1}{3}} \tag{2.42}$$

e che $A = \Omega\rho$, il valore dell'energia cinetica media per particella è

$$\langle t \rangle = \frac{\langle T \rangle}{A} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m_N}. \tag{2.43}$$

Termine di potenziale

Consideriamo ora l'energia potenziale (eq. 2.25):

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \langle kl | v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) (1 - P_M P_\sigma P_\tau) | kl \rangle \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{l} \\ |\vec{k}|, |\vec{l}| < k_f}} \left(\sum_{\sigma_k, \sigma_l} \mathbb{1} \cdot \sum_{\tau_k, \tau_l} \mathbb{1} \cdot \langle kl | v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) | kl \rangle \right. \quad (2.45)$$

$$\left. - \sum_{\sigma_k, \sigma_l} \delta_{\sigma_k \sigma_l} \cdot \sum_{\tau_k, \tau_l} \delta_{\tau_k \tau_l} \langle kl | v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) P_M | kl \rangle \right) \quad (2.46)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{l} \\ |\vec{k}|, |\vec{l}| < k_f}} [16 \langle kl | v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) | kl \rangle - 4 \langle kl | v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) P_M | kl \rangle]. \quad (2.47)$$

L'operatore di scambio P_M è presente a causa della natura fermionica dei nucleoni, ma anche nel potenziale di Brink&Boeker in cui è l'unico fattore che simula la parte repulsiva dell'interazione [23], in quanto è stato scelto un potenziale a due corpi in forma semplificata con un solo range. L'energia, per quanto riguarda il primo ordine perturbativo (o HF), si riduce alla somma di due termini, uno diretto e uno di scambio, ottenuti dal rimescolamento dei diversi contributi di Hartree e di Fock:

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} 4 \left[S(4 - 5m) \langle kl | e^{-\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{\mu^2}} | kl \rangle + S(5m - 1) \langle kl | e^{-\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{\mu^2}} | lk \rangle \right]. \quad (2.48)$$

Vediamo ora di calcolare gli elementi di matrice presenti in (2.48). Per il caso diretto si ottiene:

$$\langle V_d \rangle = 2S(4 - 5m) \sum_{\vec{k}, \vec{l}} \langle kl | e^{-\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{\mu^2}} | kl \rangle \quad (2.49)$$

$$= 2S(4 - 5m) \sum_{\vec{k}, \vec{l}} \int_{\Omega} d^3 \vec{r}_1 \int_{\Omega} d^3 \vec{r}_2 \frac{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{-i\vec{l} \cdot \vec{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{\mu^2}} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{i\vec{l} \cdot \vec{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \quad (2.50)$$

$$= \frac{2}{\Omega^2} S(4 - 5m) \sum_{\vec{k}, \vec{l}} \int_{\Omega} d^3 \vec{R} \int_{\Omega} d^3 \vec{r} e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (2.51)$$

$$= \frac{2}{\Omega^2} S(4 - 5m) \mu^3 \pi^{\frac{3}{2}} \frac{\Omega}{(2\pi)^6} \int_{|\vec{k}| < k_f} d^3 \vec{k} \int_{|\vec{l}| < k_f} d^3 \vec{l} \quad (2.52)$$

$$= S(4 - 5m) \frac{\mu^3 \pi^{\frac{3}{2}}}{8} \Omega \rho^2, \quad (2.53)$$

dove nel passaggio da (2.50) a (2.51) è stato effettuato un cambio di coordinate nel sistema relativo e del centro di massa

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, \quad (2.54)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (2.55)$$

$$|\det(\mathbf{J})| = 1, \quad (2.56)$$

con $\mathbf{J}$ matrice Jacobiana. Grazie all'invarianza traslazionale del sistema è stato possibile fare ciò senza cambiare la regione di integrazione. Infine, dividendo per il numero di nucleoni $A = \Omega\rho$ si ricava il contributo medio del termine diretto per nucleone

$$\langle v_d \rangle = \frac{S\mu^3\pi^3}{8}(4 - 5m)\rho. \quad (2.57)$$

In modo analogo può essere ricavato il contributo all'energia per nucleone del termine di scambio, che assume la forma

$$\langle v_e \rangle = \frac{S(5m - 1)}{2\sqrt{\pi}}g(\mu k_f), \quad (2.58)$$

$$g(q) = \frac{2}{q^3} - \frac{3}{q} - \left(\frac{2}{q^3} - \frac{1}{q} \right) e^{-q^2} + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(q), \quad (2.59)$$

dove

$$\operatorname{erf}(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^q dx e^{-x^2} \quad (2.60)$$

è chiamata funzione d'errore.

Equazione di stato

Anche l'energia per nucleone può essere scritta come funzione della densità sommando il termine cinetico (eq. 2.43) e i due contributi del potenziale (eq. 2.49, 2.58) calcolati precedentemente:

$$e(\rho) = \langle t \rangle + \langle v_d \rangle + \langle v_e \rangle \quad (2.61)$$

$$= \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m_N} + \frac{S\mu^3\pi^3}{8}(4 - 5m)\rho + \frac{S(5m - 1)}{2\sqrt{\pi}}g(\mu k_f). \quad (2.62)$$

I tre parametri dell'interazione S , μ e m sono stati calcolati in [15] vincolando il sistema a riprodurre i valori dell'energia $e(\rho_o)$, della pressione $P(\rho_o)$ e dell'incompressibilità K_∞ alla densità di saturazione. Sono stati ottenuti i seguenti risultati:

$$S = -430 \text{ MeV}, \quad (2.63)$$

$$m = 1.32, \quad (2.64)$$

$$\mu = 0.834. \quad (2.65)$$

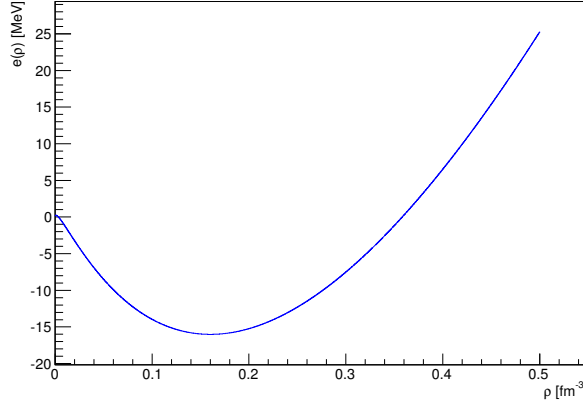


Figura 2.2: Energia media per nucleone in funzione della densità calcolata a livello HF

Sulla base di questi valori si può notare come il primo termine dell'energia potenziale possieda un carattere repulsivo e un andamento proporzionale a ρ : per alte densità questo contributo è dominante e restituisce la tendenza all'instabilità per un sistema in cui i nucleoni si trovano mediamente a una distanza inferiore al range. Il termine di scambio domina invece a basse densità, e alla densità di saturazione dove il termine diretto è trascurabile, bilancia il termine cinetico. In figura 2.2 è riportato l'andamento dell'energia in funzione della densità.

2.4.2 Proprietà di singola particella

Riprendiamo il discorso sulla auto-energia in approssimazione HF affrontato nella sezione 2.3, applicandolo al potenziale a due corpi scelto. Gli elementi di matrice V_{klkl} e V_{klkk} contenuti in (2.39) diventano

$$V_{klkl} = \langle kl | S(1 - m + mP_M) e^{-\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{\mu^2}} | kl \rangle \quad (2.66)$$

$$V_{klkk} = \langle kl | S(1 - m + mP_M) e^{-\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{\mu^2}} | lk \rangle, \quad (2.67)$$

e l'auto-energia in approssimazione HF può essere riscritta come[7][15]

$$\Sigma_{HF}^{BB} = \frac{\pi^{3/2} \mu^3}{4} S(4 - 5m) \rho + \frac{1}{\sqrt{\pi}} S(5m - 1) u(\mu k, \mu k_f), \quad (2.68)$$

$$u(q, q_f) = \frac{1}{q} \left[e^{-\frac{(q+q_f)^2}{4}} - e^{-\frac{(q-q_f)^2}{4}} \right] + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\text{erf} \left(\frac{q + q_f}{2} \right) - \text{erf} \left(\frac{q - q_f}{2} \right) \right], \quad (2.69)$$

dove, nella (2.68), $k = |\vec{k}|$.

Giunti a questo punto è finalmente possibile calcolare la quantità m^*/m a

livello HF, utilizzando la (2.35):

$$\frac{m^*}{m}(k) = \left(1 + \frac{m}{\hbar^2} \mu \frac{1}{\sqrt{\pi}} S(5m-1) h(\mu k, \mu k_f) \right)^{-1}, \quad (2.70)$$

$$h(\mu k, \mu k_f) = \frac{du}{dk}(q, q_f) = \frac{1}{q^3} \left[(2 - qq_f) e^{-\frac{(q-q_f)^2}{4}} - (2 + qq_f) e^{-\frac{(q+q_f)^2}{4}} \right] \quad (2.71)$$

Scegliendo i valori che meglio riproducono il punto di saturazione (2.63-2.65), si può ottenere l'andamento di m^*/m in funzione del momento, per un potenziale come quello presentato nel paragrafo 2.1.2, in approssimazione HF (figura (2.3)).

Si può subito notare come il valore della massa efficace oscilli intorno a

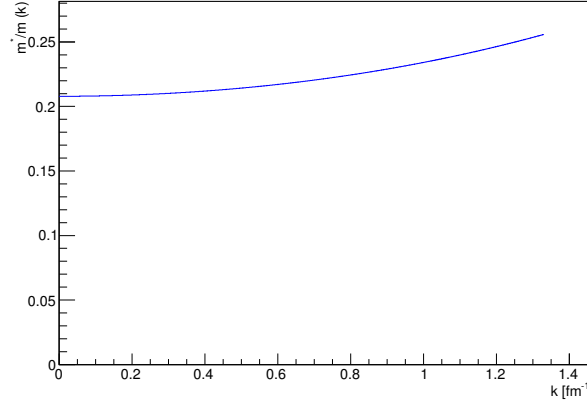


Figura 2.3: Andamento del rapporto tra massa efficace e massa del nucleone in funzione del range di interazione.

0.25, molto diverso dal valore atteso, compreso tra 0.6 e 0.8 per $k = k_f$ [18]. L'approssimazione HF trascura dunque delle dinamiche che sono determinanti per definire le proprietà di singola particella. Nel paragrafo 3.2 viene indicata una possibile soluzione a questo problema. Un'altra informazione che si può ricavare dal grafico è la debole dipendenza della massa efficace dal momento. Questa caratteristica tornerà poi utile nel capitolo successivo per il calcolo del contributo al secondo ordine perturbativo della auto-energia.

Capitolo 3

Secondo ordine perturbativo

Le teorie di campo medio hanno il grande pregio di semplificare notevolmente la trattazione di moltissimi sistemi a molti corpi di cui sarebbe impossibile una conoscenza esatta a causa del gran numero di particelle, che spesso rende insostenibile il peso computazionale nello studio della dinamica. Per di più, la fisica del nucleo non è ancora arrivata a definire in maniera esatta e sistematica quali siano i processi che regolano le interazioni tra protoni e neutroni all'interno del nucleo, quindi un metodo approssimativo è necessario per affrontare il problema.

Proprio per la loro natura non esatta, questi modelli si prestano a delle correzioni che permettono di ridurre il *gap* tra ciò che si osserva sperimentalmente e le predizioni del modello. La teoria perturbativa, descritta in dettaglio in appendice B, è uno di questi metodi, e verrà utilizzato in seguito per correggere l'equazione di stato e l'energia associata alle singole particelle rispetto alla soluzione HF ricavata nel capitolo precedente.

3.1 Proprietà globali per il secondo ordine perturbativo

Si potrebbe pensare che la scelta migliore di un'Hamiltoniana imperturbata, sulla cui base sviluppare i vari ordini di perturbazione, sia quella relativa al solo contributo cinetico H_K : questa infatti è l'unica componente che prescinde da qualsiasi tipo di approssimazione. Tale scelta sarebbe tuttavia sbagliata, perchè per rappresentare un sistema legato, qual è la materia nucleare, non è possibile utilizzare un'Hamiltoniana imperturbata che descriva un sistema di particelle libere e non interagenti. Una possibile soluzione consiste nel considerare come termine imperturbato $H_0 = H_K + U_{HF}$, dove U_{HF} è il contributo di Hartree-Fock definito come la somma su tutte le particelle dell'auto-energia calcolata in (2.39) di cui sappiamo esattamente calcolare lo spettro, come mostrato nel capitolo precedente. La dinamica del sistema

può essere quindi descritta da

$$H = (H_K + U_{HF}) + (V_p - U_{HF}), \quad (3.1)$$

dove il termine V_p rappresenta il potenziale a due corpi trattato perturbativamente. In questo modo l'energia dello stato fondamentale calcolata al primo ordine perturbativo diventa

$$E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} \quad (3.2)$$

$$= \langle \Phi_0 | H_K + U_{HF} | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | V_p - U_{HF} | \Phi_0 \rangle \quad (3.3)$$

$$= E_{HF}, \quad (3.4)$$

in quanto gli elementi di matrice $\langle \Phi_0 | V_p | \Phi_0 \rangle$ nel secondo termine di (3.3) coincidono con U_{HF} e dunque il contributo perturbativo è nullo.

La prima correzione all'energia HF compare con l'introduzione del secondo ordine perturbativo (B.20), che per un sistema di fermioni diventa

$$E_0^{(2)} = \sum_{n \neq 0} \frac{\langle \Phi_0 | V_p | \Phi_n \rangle \langle \Phi_n | V_p | \Phi_0 \rangle}{\epsilon_0 - \epsilon_n} \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k,l,m,n} \frac{\langle kl | v(\vec{r}_1, \vec{r}_2) | mn \rangle_{AS} \langle mn | v(\vec{r}_1, \vec{r}_2) | kl \rangle_{AS}}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_m - \epsilon_n}, \quad (3.6)$$

dove occorre ricordarsi che la sommatoria va intesa su tutti i numeri quantici associati allo stato, e dunque anche su spin e isospin. Gli stati $|m\rangle$ e $|n\rangle$ rappresentano gli stati eccitati di singola particella. Dal momento che le particelle nello stato fondamentale occupano tutti gli stati che giacciono all'interno della sfera di Fermi nello spazio dei momenti, una particella che si sposta in uno stato eccitato possiede un momento $\vec{m}$ tale per cui $|\vec{m}| > k_f$. Gli stati ϵ_i sono invece le energie di singola particella a livello HF calcolate nel paragrafo date dalla somma tra l'energia cinetica e l'auto-energia (2.68). Facendo uso del fatto che lo scambio tra le particelle $|m\rangle$ e $|n\rangle$ introduce al più un fattore di fase che non contribuisce nel calcolo del modulo quadro

dell'elemento di matrice, posso riscrivere (3.6) come

$$E_0^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot 2 \sum_{k,l,m,n} \frac{\langle kl|v(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|mn\rangle \langle mn|v(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|kl\rangle_{AS}}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_m - \epsilon_n} \quad (3.7)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{l}, \vec{m}, \vec{n}} \left[\frac{|\langle kl|v(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|mn\rangle|^2}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_m - \epsilon_n} \cdot \sum_{\substack{\sigma_k, \sigma_l, \\ \sigma_m, \sigma_n}} \delta_{\sigma_k \sigma_m} \delta_{\sigma_l \sigma_n} \cdot \sum_{\substack{\tau_k, \tau_l, \\ \tau_m, \tau_n}} \delta_{\tau_k \tau_m} \delta_{\tau_l \tau_n} + \right. \quad (3.8)$$

$$\left. - \frac{\langle kl|v(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|mn\rangle \langle mn|v(\vec{r}_1, \vec{r}_2)P_M|kl\rangle}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_m - \epsilon_n} \cdot \sum_{\sigma_m, \sigma_n} \delta_{\sigma_m \sigma_n} \cdot \sum_{\tau_m, \tau_n} \delta_{\tau_m \tau_n} \right] \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{l}, \vec{m}, \vec{n}} \left[16 \frac{|\langle kl|v(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|mn\rangle|^2}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_m - \epsilon_n} - 4 \frac{\langle kl|v(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|mn\rangle \langle mn|v(\vec{r}_1, \vec{r}_2)P_M|kl\rangle}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_m - \epsilon_n} \right]. \quad (3.10)$$

Le sommatorie su spin e isospin nel passaggio da (3.8) a (3.9) sono state ridotte utilizzando l'uguaglianza $\delta_{\sigma_k \sigma_m} \delta_{\sigma_l \sigma_n} \delta_{\sigma_k \sigma_n} \delta_{\sigma_l \sigma_m} = \delta_{\sigma_m \sigma_n}$, ottenuta fissando $\sigma_k = \sigma_m$ e $\sigma_l = \sigma_n$ ovunque.

3.2 Proprietà di singola particella per il secondo ordine perturbativo

L'approssimazione di campo medio restituisce una buona compatibilità con le osservabili sperimentali legate alle proprietà globali del sistema, come l'energia totale alla densità di saturazione; i valori di alcune variabili sperimentali come incompressibilità e risonanza gigante di monopolo sono compatibili con i dati ottenuti in laboratorio [15]. Le aspettative vengono invece deluse per quanto riguarda le proprietà di singola particella: non è possibile ricavare un'Hamiltoniana di singola particella $h_i(k)$ che riesca a descrivere in maniera soddisfacente la dinamica dei singoli nucleoni in materia nucleare. A tal proposito un possibile sviluppo nel modello può essere quello di considerare gli effetti di correlazione nel moto delle particelle, cioè quegli effetti, trascurati in Hartree-Fock, tali per cui il moto di una particella è legato a quello di tutte le altre e che quindi fanno in modo che il potenziale efficace a cui essa è soggetta non viene più approssimato a un valore costante nella variabile ω .

I diagrammi per la correzione al secondo ordine della auto-energia, dati due nucleoni interagenti sono mostrati in figura 3.1.

Le due pitture rappresentano i casi diretti e di scambio del potenziale dovuti alla natura fermionica dei nucleoni, e hanno un'interpretazione fisica particolarmente efficace per capire il problema: l'interazione virtuale avviene in un lasso di tempo Δt , all'interno del quale una coppia di particelle

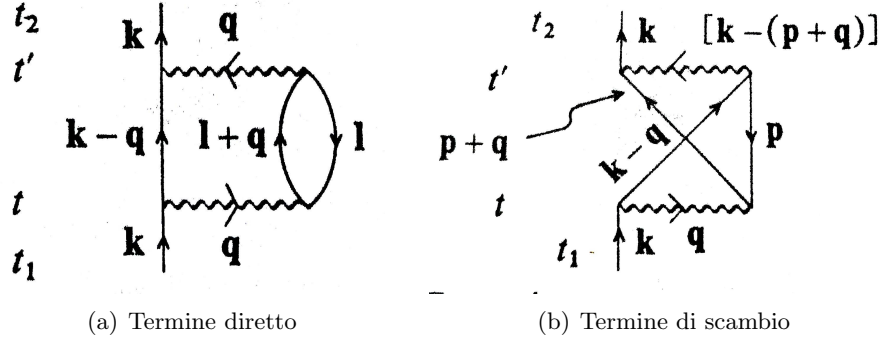


Figura 3.1: Contributo diagrammatico del secondo ordine perturbativo alla auto-energia.

interagisce scambiando una certa quantità (dipendente dal tipo di interazione) sufficiente ad eccitare i nucleoni che in un secondo momento, interagendo nuovamente, possono tornare nello stato iniziale (caso diretto) o scambiare tra loro la quantità coinvolta nell'interazione (caso di scambio). Avendo poi diagonalizzato l'Hamiltoniana del sistema sugli autostati di momento, spin e isospin, saranno necessariamente queste le quantità scambiate nel caso di materia nucleare uniforme. Tradotti in formule questi diagrammi diventano

$$\Sigma_{klmn}^V = 4 \sum_{\substack{l,m,n, \\ |\vec{l}| < k_f \\ |n|, |m| > k_f}} \frac{V_{klmn}^2}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_m - \epsilon_n} \quad (3.11)$$

$$\Sigma_{klmn}^V = - \sum_{\substack{l,m,n, \\ |\vec{l}| < k_f \\ |n|, |m| > k_f}} \frac{V_{klmn} V_{klnm}}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_m - \epsilon_n}, \quad (3.12)$$

dove

- V_{klmn} e V_{klnm} sono gli elementi di matrice rappresentanti l'interazione;
- ϵ_i rappresentano i valori di energia di singola particella nello stato imperturbato HF;
- i fattori moltiplicativi precedenti le sommatorie sono dovuti alla degenerazione sugli stati di spin e isospin, in maniera analoga a quanto esplicitamente calcolato in (2.39-2.38);

3.3 Risultati per un potenziale Brink-Boeker

Prima di procedere con un'analisi quantitativa, conviene evidenziare due caratteristiche del potenziale Brink&Boeker che semplificano notevolmente i calcoli relativi al secondo ordine perturbativo:

1. Il potenziale trattato è una funzione Gaussiana, perciò l'interazione non coinvolge la dinamica del centro di massa, ma solo quella relativa, essendo dipendente dalla distanza reciproca. Momento e spin rimangono pertanto conservati durante l'interazione. Date due particelle interagenti con momento e spin iniziali $(\vec{k}, \sigma_k)$ e $(\vec{l}, \sigma_l)$ e $(\vec{m}, \sigma_m)$ e $(\vec{n}, \sigma_n)$ finali, avrò dunque

$$\vec{k} + \vec{l} = \vec{m} + \vec{n}, \quad (3.13)$$

$$\sigma_k + \sigma_l = \sigma_m + \sigma_n. \quad (3.14)$$

Questo comporta che le due particelle scambino nell'interazione una quantità di momento uguale e contraria. Chiamando $\vec{q}$ questa quantità, un modo per scrivere (3.13) può essere, per esempio

$$\vec{m} = \vec{k} + \vec{q}, \quad (3.15)$$

$$\vec{n} = \vec{l} - \vec{q}, \quad (3.16)$$

dove bisogna ricordarsi di non trascurare gli effetti dell'operatore di scambio;

2. Come si è detto precedentemente, i termini nel denominatore di (3.11) e (3.12), che tenendo conto di quanto detto nel punto precedente circa la conservazione dei momenti possono essere riscritti come

$$\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_{k+q} - \epsilon_{l-q}, \quad (3.17)$$

rappresentano le auto-energie a livello HF calcolate in 2.3 o equivalentemente le energie delle quasiparticelle (2.29) (sempre in approssimazione HF). L'utilizzo di queste quantità nel calcolo degli integrali potrebbe risultare molto complicato, poichè la dipendenza della massa efficace dal momento è non banale, tuttavia possono essere fatte delle considerazioni che rendono i calcoli molto più semplici. Per quanto riguarda le energie HF per le particelle nel ground state, di momento $\vec{k}$ e $\vec{l}$, guardando la Figura 2.3 è possibile notare come la dipendenza della massa efficace dal momento sia debole per valori del momento inferiori a k_f . Una buona approssimazione consiste quindi nel considerare il valor medio della massa efficace, ottenibile integrando numericamente (2.70) su $[k, k_f]$ e dividendo per tale intervallo:

$$m' = \langle m^* \rangle_{\rho=\rho_0} \approx 0.22m_N. \quad (3.18)$$

Per quanto riguarda gli ultimi due termini di (3.17), essi rappresentano le energie degli stati tali per cui $|\vec{k}| > k_f$. Si vedrà più avanti che il numeratore di (3.11) e (3.12) decresce esponenzialmente così da annullarsi in un range dell'ordine di grandezza di μ^{-1} . Questo smorzamento garantisce che per valori del momento $\geq \mu^{-1}$, minori dunque anche del momento di Fermi, il corrispondente contributo viene smorzato con decrescita gaussiana e non partecipa in maniera determinante all'integrazione. È lecito quindi considerare ϵ_{k+q} e ϵ_{l-q} in maniera analoga a quanto fatto per i due termini precedenti, ossia con un valore della massa efficace dato da (3.18). Verrà dunque assunta l'approssimazione

$$\epsilon_i = \frac{\hbar^2 \vec{i}^2}{2m'} \quad (3.19)$$

per tutte le energie di singola particella in approssimazione HF utilizzate di seguito.

3.3.1 Energia del sistema

Osservando l'equazione (3.10) si nota che l'operatore P_M presente all'interno del potenziale introduce un ulteriore sviluppo dell'auto-energia. Infatti:

$$\begin{aligned} \langle kl | v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) | mn \rangle &= \langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} S [1 - m + m P_M] | mn \rangle \\ &= S (1 - m) \langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | mn \rangle + S m \langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | nm \rangle, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \langle kl | v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) | nm \rangle &= \langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} S [(1 - m) P_M + m] | mn \rangle \\ &= S m \langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | mn \rangle + S (1 - m) \langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | nm \rangle, \end{aligned} \quad (3.21)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
|\langle kl|v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|mn\rangle|^2 &= S^2 (1-m)^2 |\langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|mn\rangle|^2 \\
&\quad + 2S^2 m (1-m) \langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|mn\rangle \langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|nm\rangle, \\
&\quad + S^2 m^2 |\langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|nm\rangle|^2
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
\langle kl|v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|mn\rangle \langle kl|v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|nm\rangle &= \\
&= S^2 m (1-m) |\langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|mn\rangle|^2 \\
&\quad + S^2 (1+2m^2-2m) \langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|mn\rangle \langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|nm\rangle \\
&\quad + S^2 m (1-m) |\langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|nm\rangle|^2,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
|\langle kl|v_{BB}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|nm\rangle|^2 &= S^2 m^2 |\langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|mn\rangle|^2 \\
&\quad + 2S^2 m (1-m) \langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|mn\rangle \langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|nm\rangle, \\
&\quad + S^2 (1-m)^2 |\langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|nm\rangle|^2.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\tag{3.25}$$

Il doppio scambio dei momenti delle particelle¹ provoca una divisione di $E_0^{(2)}$ in tre contributi. Tenendo conto di (3.15-3.16) posso cambiare gli indici della sommatoria in $\vec{q}$, $\vec{k}$ ed $\vec{l}$. L'energia totale (3.6) per il sistema diventa

$$E_0^{(2)} = 2S^2 (5m^2 - 9m + 4) \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{l}, \vec{q} \\ |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{k}+\vec{q}|, |\vec{l}-\vec{q}| > k_f}} \frac{|\langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|mn\rangle|^2}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_{k+q} - \epsilon_{l-q}} \tag{3.26}$$

$$+ 2S^2 (5m^2 - m) \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{l}, \vec{q} \\ |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{k}+\vec{q}|, |\vec{l}-\vec{q}| > k_f}} \frac{|\langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|nm\rangle|^2}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_{k+q} - \epsilon_{l-q}} \tag{3.27}$$

$$+ 2S^2 (-1 - 10m^2 + 10m) \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{l}, \vec{q} \\ |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{k}+\vec{q}|, |\vec{l}-\vec{q}| > k_f}} \frac{\langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|mn\rangle \langle kl|e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}|nm\rangle}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_{k+q} - \epsilon_{l-q}}. \tag{3.28}$$

Come nell'approssimazione Hartree-Fock sono presenti un termine diretto $\langle V_q \rangle$ e uno di scambio V_{q+k-l} , ma si può notare anche la presenza di un

¹Dovuto alla natura fermionica dei nucleoni e alla forma del potenziale a due corpi.

terzo termine che chiameremo $\langle V_q^{(2)} \rangle$.

Di seguito sono mostrati i calcoli utilizzati per ottenere la forma esplicita di queste tre componenti.

Termine diretto

Riscriviamo per prima cosa l'elemento di matrice presente in (3.26) effettuando una risoluzione dell'identità sugli autostati delle posizioni delle particelle $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$:

$$\langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | mn \rangle = \int_{\Omega} \int_{\Omega} d^3 \vec{r}_1 d^3 \vec{r}_2 \frac{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{-i\vec{l} \cdot \vec{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{\mu^2}} \frac{e^{i(\vec{k} + \vec{q}) \cdot \vec{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{i(\vec{l} - \vec{q}) \cdot \vec{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} \quad (3.29)$$

$$= \frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} d^3 \vec{r}_1 d^3 \vec{r}_2 e^{-\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{\mu^2}} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}. \quad (3.30)$$

Ci spostiamo ora nel sistema di coordinate relativa e del centro di massa, come avevamo fatto nella sezione 2.4.1 per calcolare gli elementi di matrice associati all'energia potenziale del sistema in approssimazione HF:

$$\langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | mn \rangle = \frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} d^3 \vec{R} d^3 \vec{r} e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \quad (3.31)$$

$$= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} d^3 \vec{r} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (3.32)$$

$$= \frac{1}{\Omega} e^{-q^2 \frac{\mu^2}{4}} \int_{\Omega} d^3 \vec{r} e^{-\left(\frac{\vec{r}}{\mu^2} + \frac{i\vec{q}\mu}{2}\right)^2}, \quad (3.33)$$

che con l'ulteriore cambio di variabili

$$\vec{y} = \frac{\vec{r}}{\mu^2} + \frac{i\vec{q}\mu}{2}, \quad (3.34)$$

$$d^3 \vec{y} = \frac{d^3 \vec{r}}{\mu^3}, \quad (3.35)$$

diventa

$$\langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | mn \rangle = \frac{1}{\Omega} e^{-q^2 \frac{\mu^2}{4}} \mu^3 \int_{\Omega} d^3 \vec{y} e^{-y^2} \quad (3.36)$$

$$= \frac{1}{\Omega} \mu^3 \pi^{\frac{3}{2}} e^{-q^2 \frac{\mu^2}{4}}. \quad (3.37)$$

Torniamo ora al calcolo di (3.26). Ricordando l'approssimazione fatta in (3.19) e utilizzando il modulo quadro di (3.37), questo termine diventa

$$\langle V_q \rangle = 2S^2(5m^2 - 9m + 4) \frac{\pi^3 \mu^6}{\Omega^2} \sum_{\vec{q}, \vec{k}, \vec{l}} \frac{e^{-q^2 \frac{\mu^2}{2}}}{\frac{\hbar^2}{2m'} (k^2 + l^2 - (\vec{k} + \vec{q})^2 - (\vec{l} - \vec{q})^2)} \quad (3.38)$$

$$= -2S^2(5m^2 - 9m + 4) \frac{\pi^3 \mu^6}{\Omega^2} \frac{m'}{\hbar^2} \sum_{\substack{\vec{q}, \vec{k}, \vec{l} \\ |\vec{k}|, |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{k} + \vec{q}|, |\vec{l} - \vec{q}| > k_f}} \frac{e^{-q^2 \frac{\mu^2}{2}}}{\vec{q} \cdot (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})}, \quad (3.39)$$

dove nell'ultimo passaggio è stato semplicemente sviluppato il denominatore. A questo punto valutiamo la sommatoria sui momenti, che grazie alla proprietà (1.12) può essere espressa come integrazione:

$$I(\mu, k_f) = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_k} d^3 \vec{q} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_{\substack{|\vec{k}| < k_f \\ |\vec{k} + \vec{q}| > k_f}} d^3 \vec{k} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_{\substack{|\vec{l}| < k_f \\ |\vec{l} - \vec{q}| > k_f}} d^3 \vec{l} \frac{e^{-q^2 \frac{\mu^2}{2}}}{\vec{q} \cdot (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})}. \quad (3.40)$$

Al fine di semplificare l'espressione effettuiamo il cambio di variabili

$$\begin{aligned} \vec{k}' &= \frac{\vec{k}}{k_f} & \vec{l}' &= \frac{\vec{l}}{k_f} & \vec{q}' &= \frac{\vec{q}}{k_f} \\ x &= k_f \mu, \end{aligned} \quad (3.41)$$

che consente di scrivere l'espressione precedente come

$$I(x) = \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} k_f^7 \int_{\Omega_k} d^3 \vec{q}' \int_{\substack{|\vec{k}'| < 1 \\ |\vec{k}' + \vec{q}'| > 1}} d^3 \vec{k}' \int_{\substack{|\vec{l}'| < 1 \\ |\vec{l}' - \vec{q}'| > 1}} d^3 \vec{l}' \frac{e^{-q'^2 \frac{x^2}{2}}}{\vec{q}' \cdot (\vec{q}' + \vec{k}' - \vec{l}')}. \quad (3.42)$$

H. Euler ha fornito la soluzione a tale integrale in [24], sfruttando la trasformata di Laplace

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha x}, \quad \forall x > 0 \quad (3.43)$$

per riformulare il denominatore, che risulta essere una quantità sempre positiva in quanto opposto della differenza di energia tra lo stato fondamentale

e quello eccitato. Nell'articolo vengono poi mostrati i passaggi che portano a

$$I(x) = \frac{32}{15} \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} \frac{\pi^3}{x^4} k_f^7 f_{dir}(x), \quad (3.44)$$

$$f_{dir}(x) = 2x^4 \left[\int_0^1 du u e^{-2u^2 x^2} \left(\log(1+u) \left(4 + \frac{15}{2}u - 5u^3 + \frac{3}{2}u^5 \right) + 29u^2 - 3u^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + \log(1+u) \left(4 - \frac{15}{2}u + 5u^3 - \frac{3}{2}u^5 \right) + 40u^2 \log 2 \right) + \right. \\ \left. \int_0^1 du u e^{-2u^2 x^2} \left(\log(1+u) \left(4 - 20u^2 - 20u^3 + 4u^5 \right) + 4u^3 + 22u + \right. \right. \\ \left. \left. + \log(1+u) \left(-4 + 20u^2 - 20u^3 + 4u^5 \right) + \log u (40u^3 - 8u^5) \right) \right]. \quad (3.45)$$

Tale integrazione è stata effettuata numericamente in linguaggio C++ sfruttando il metodo di Simpson [26], che calcola l'area sotto la curva della funzione integranda dividendo il dominio di quest'ultima in intervalli e approssimandola in ognuno di essi ad un polinomio di secondo grado. Tenendo presente che la densità varia in un intervallo compreso tra 0 e 0.5 fm⁻³, sono stati considerati valori di $x \in [0, 2.8]$, con un passo di pari a 0.05.

Per il metodo Simpson l'errore stimato è $e = kh^4$, dove k è una costante che dipende dalla funzione integranda e dall'intervallo di integrazione e h è l'ampiezza dei sottointervalli di integrazione. Il metodo di dimezzamento del passo ha poi permesso di stimare, per 10⁶ segmenti, un errore sempre inferiore allo 0.0001%.

Il valore dell'integrale in funzione di diversi valori di x è stato usato per trovare per tali punti la funzione interpolante, ottenuta grazie ad un fit eseguito con *ROOT cern*. Il risultato che ha restituito un valore del χ^2 più basso è dato dalla somma di un polinomio di grado dieci e una gaussiana:

$$f_{dir}(x) = -6.15874 + 11.390x + 0.617621x^2 - 3.58541x^3 + 0.0244709x^4 + 0.345463x^5 + \\ + 0.103764x^6 - 0.00502348x^7 - 0.0157602x^8 - 0.0049893x^9 + 0.00200924x^{10} + \\ + 8.10397e^{-\frac{(x+0.32559)^2}{(0.617621)^2}}. \quad (3.46)$$

Possiamo ora utilizzare il risultato (3.44) per ottenere i valori del contributo

all'energia per il termine diretto (3.39). Si ottiene:

$$\begin{aligned}\langle V_q \rangle &= -2S^2(5m^2 - 9m + 4) \frac{\pi^3 \mu^6}{\Omega^2} \frac{m'}{\hbar^2} \cdot \frac{32}{15} \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} \frac{\pi^3}{(k_f \mu)^4} k_f^7 f_{dir}(k_f \mu) \\ &= -S^2(5m^2 - 9m + 4) \frac{\mu^2}{120\pi^3} \frac{m'}{\hbar^2} \Omega k_f^3 f_{dir}(k_f \mu)\end{aligned}\quad (3.47)$$

$$= -S^2(5m^2 - 9m + 4) \frac{\mu^2}{80\pi} \frac{m'}{\hbar^2} \Omega \rho f_{dir}(k_f \mu), \quad (3.48)$$

ottenuta ancora una volta facendo uso della relazione tra momento di Fermi e densità del sistema (1.14).

Infine si ricava l'espressione dell'energia media per nucleone corrispondente al termine diretto diviso per il numero di nucleoni $A = \Omega \rho$:

$$\langle v_q \rangle = -\frac{S^2(5m^2 - 9m + 4)\mu^2 m'}{80\pi \hbar^2} f_{dir}(k_f \mu). \quad (3.49)$$

Termine di scambio

L'elemento di matrice in cui le particelle sono invertite, contenuto in (3.26) viene trattato come nel caso diretto, a meno della sostituzione del vettore $\vec{q}$ con $(\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})$:

$$\langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | nm \rangle = \frac{1}{\Omega} \mu^3 \pi^{\frac{3}{2}} e^{-(\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})^2 \frac{\mu^2}{4}} \quad (3.50)$$

e il termine di scambio per l'energia assume la forma

$$\langle V_{q+k-l} \rangle = 2S^2(1 - 10m^2 + 10m) \frac{\pi^3 \mu^6 m'}{\Omega^2 \hbar^2} \sum_{\substack{\vec{q}, \vec{k}, \vec{l} \\ |\vec{k}|, |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{k} + \vec{q}|, |\vec{l} - \vec{q}| > k_f}} \frac{e^{-q^2 \frac{\mu^2}{2} - (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})^2 \frac{\mu^2}{4}}}{\vec{q} \cdot (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})}. \quad (3.51)$$

Anche in questo caso la somma sui momenti può essere estesa al continuo, e attuando un cambio di variabili analogo a (3.41) questa assume la forma

$$J(x) = \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} k_f^7 \int_{\Omega_k} d^3 \vec{q} \int_{\substack{|\vec{k}| < 1 \\ |\vec{k} + \vec{q}| > 1}} d^3 \vec{k} \int_{\substack{|\vec{l}| < 1 \\ |\vec{l} - \vec{q}| > 1}} d^3 \vec{l} \frac{e^{-q^2 \frac{x^2}{2} - (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})^2 \frac{x^2}{4}}}{\vec{q} \cdot (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})}. \quad (3.52)$$

Come per (3.42), anche la soluzione a questo integrale è stata trovata da H. Euler [24], adottando il cambio di variabili

$$\begin{cases} \vec{a} &= \frac{\vec{k} - \vec{l}}{2} \\ \vec{b} &= \frac{\vec{k} + \vec{l}}{2} \\ \vec{r} &= \vec{q} + \frac{\vec{k} - \vec{l}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{k} &= \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{l} &= \vec{b} - \vec{a} \\ \vec{q} &= \vec{r} - \vec{a}, \end{cases} \quad |det \mathbf{J}| = 8 \quad (3.53)$$

che mi restituisce l'integrale (3.52) nella forma

$$J(x) = \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} 8k_f^7 \int_{\Omega_k} d^3\vec{r} \int_{\Omega_k} d^3\vec{a} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2-a^2} \int_{\substack{|\vec{b} \pm \vec{r}| \geq 1 \\ |\vec{b} \pm \vec{a}| \geq 1}} d^3\vec{b}. \quad (3.54)$$

L'integrale in $d^3\vec{b}$ è risolubile utilizzando il teorema dei residui: vengono trovati cinque risultati diversi $I_i(a, r)$ su altrettanti domini di integrazione, la cui unione forma l'insieme che soddisfa le condizioni in (3.54):

$$\int_{\substack{|\vec{b} \pm \vec{r}| \geq 1 \\ |\vec{b} \pm \vec{a}| \geq 1}} d^3\vec{b} = -\frac{\pi}{4ar} \begin{cases} I_1(a, r) & \text{Dominio I} \\ I_2(a, r) & \text{Dominio II} \\ I_3(a, r) & \text{Dominio III} \\ I_4(a, r) & \text{Dominio IV} \\ I_5(a, r) & \text{Dominio V,} \end{cases} \quad (3.55)$$

dove le regioni di integrazione, definite per i moduli delle variabili $\vec{a}$ e $\vec{r}$, sono

Dominio	Estremi di integrazione	
	a	r
I_1	$(1 - \sqrt{1 - r^2}, 1)$	$(0, 1)$
I_2	$(1 - \sqrt{1 - r^2}, r)$	$(0, 1)$
I_3	$(0, 1)$	$(1, 2 - a)$
I_4	$(0, 1)$	$(2 - a, 1 + \sqrt{1 - a^2})$
I_5	$(0, 1)$	$(2, \infty)$
	$(1, \sqrt{2r - r^2})$	$(2, \infty).$

I volumi di queste regioni di integrazione sono stati trovati analiticamente grazie al software *Mathematica*. Poichè la funzione integranda (3.54) dipende solo da $|\vec{a}|$ e $|\vec{r}|$, passando in coordinate polari posso esprimere $J(x)$ come

$$J(x) = \frac{\Omega^3}{16\pi^6} k_f^7 \frac{1}{x^4} f_{ind}(x) \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
f_{ind}(x) = -x^4 & \left[\int_0^1 dr \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^r da ra \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2-a^2} I_1(a, r) + \right. \\
& \int_0^1 dr \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^1 da ra \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2-a^2} I_2(a, r) \\
& \int_0^1 da \int_1^{2-a} dr ra \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2-a^2} I_3(a, r) + \\
& \int_0^1 dr \int_{2-a}^{1+\sqrt{1+a^2}} da ra \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2-a^2} I_4(a, r) \\
& \int_2^\infty dr \int_0^1 da ra \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2-a^2} I_5(a, r) + \\
& \left. \int_0^2 dr \int_1^{\sqrt{2r-r^2}} da ra \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(r^2+a^2)}}{r^2-a^2} I_5(a, r) \right]. \quad (3.57)
\end{aligned}$$

Come per il caso precedente, non è stato possibile ottenere una soluzione analitica per questi integrali, che sono stati risolti analiticamente con il metodo di integrazione di Simpson. Ancora una volta si sono scelti valori di x compresi tra 0 e 2.8, con un passo di 0.05. La regressione dei punti ottenuti ha fornito un polinomio di sesto grado:

$$\begin{aligned}
f_{ind} = & 0.00459373 - 0.110997x + 0.5688x^2 - 0.678573x^3 \\
& + 0.0506679x^4 + 0.102246x^5 - 0.0222115x^6. \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Ritornando a (3.51) con i risultati ottenuti, esprimendo k_f in funzione della densità, si ottiene il contributo all'energia dato dal termine di scambio al secondo ordine perturbativo:

$$\langle V_{q+k-l} \rangle = 2S^2(1 - 10m^2 + 10m) \frac{\pi\mu^6 m'}{\Omega^2 \hbar^2} \frac{\Omega^3}{16\pi^6} k_f^7 \frac{1}{(\mu k_f)^4} f_{ind}(\mu k_f) \quad (3.59)$$

$$= S^2(1 - 10m^2 + 10m) \frac{3\mu^2 m'}{16\pi \hbar^2} \Omega \rho f_{ind}, \quad (3.60)$$

e dividendo per il numero dei nucleoni $A = \Omega\rho$ si ricava infine l'espressione del contributo per nucleone all'energia dovuto a questo termine:

$$\langle v_{q+k-l} \rangle = \frac{3S^2(1 - 10m^2 + 10m)\mu^2 m'}{16\pi \hbar^2} f_{ind}(\mu k_f). \quad (3.61)$$

Terzo termine

L'elemento di matrice presente in (3.28) è lo stesso che compare in (3.50). Possiamo quindi scrivere il contributo energetico per questo termine come

$$\langle V_q^{(2)} \rangle = 2S^2(5m^2 - m) \frac{\pi^3 \mu^6 m'}{\Omega^2 \hbar^2} \sum_{\substack{\vec{q}, \vec{k}, \vec{l} \\ |\vec{k}|, |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{k} + \vec{q}|, |\vec{l} - \vec{q}| > k_f}} \frac{e^{-(\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})^2 \frac{\mu^2}{2}}}{\vec{q} \cdot (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})}. \quad (3.62)$$

Di nuovo il cambio di variabili (3.41) e il passaggio alla somma continua sui momenti restituiscono

$$G(x) = \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} k_f^7 \int_{\Omega_k} d^3 \vec{q} \int_{\substack{|\vec{k}| < 1 \\ |\vec{k} + \vec{q}| > 1}} d^3 \vec{k} \int_{\substack{|\vec{l}| < 1 \\ |\vec{l} - \vec{q}| > 1}} d^3 \vec{l} \frac{e^{-(\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})^2 \frac{x^2}{4}}}{\vec{q} \cdot (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})}, \quad (3.63)$$

che essendo simile a 3.52 è stato trattato allo stesso modo [16]. Risulta

$$G(x) = \frac{\Omega^3}{16\pi^6} \frac{1}{(\mu k_f)^4} k_f^7 g_{dir}(x), \quad (3.64)$$

dove $g_{dir}(x)$ è uguale a (3.57) a meno dell'esponenziale. Come nel caso precedente sono stati trovati numericamente i valori dei vari integrali al variare del parametro $x = k_f \mu$. La funzione interpolante per questi punti con il valore χ^2 più basso è risultata essere un polinomio di decimo grado sommato a una gaussiana:

$$\begin{aligned} g_{dir}(x) = & 0.132398 + 0.108804x - 0.415623x^2 + 0.0567186x^3 + 0.0459325x^4 + 0.00885137x^5 + \\ & - 0.00212052x^6 - 0.0019782x^7 - 0.000473296x^8 + 0.000242721x^9 + \\ & - 0.13860 * e^{-(x-0.108804,2)^2} (-0.415623)^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Riportandoci a (3.62) con i risultati ottenuti ed esprimendo i momenti in funzione della densità, il contributo all'energia del sistema per il terzo termine diventa

$$\langle V_q^{(2)} \rangle = 2S^2(5m^2 - m) \frac{\pi^3 \mu^6 m'}{\Omega^2 \hbar^2} \frac{\Omega^3}{16\pi^6} \frac{1}{(\mu k_f)^4} k_f^7 g_{dir}(\mu k_f) \quad (3.66)$$

$$= S^2(5m^2 - m) \frac{3\mu^3 m'}{16\hbar^2 \pi^6} \Omega \rho g_{dir}(\mu k_f). \quad (3.67)$$

Il contributo per nucleone al terzo termine dell'energia è dunque

$$\langle v_q^{(2)} \rangle = S^2(5m^2 - m) \frac{3\mu^3 m'}{16\hbar^2 \pi^6} g_{dir}(\mu k_f). \quad (3.68)$$

Equazione di stato

L'espressione dell'energia per nucleone $e(\rho)$ valutata al secondo ordine perturbativo per un potenziale a due corpi di tipo Brink&Boeker a singola gaussiana è data da

$$\begin{aligned}
e(\rho) = & \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m_N} + \frac{S\mu^3\pi^3}{8} (4 - 5m)\rho + \frac{S(5m-1)}{2\sqrt{\pi}} g(\mu k_f) + \\
& - \frac{S^2(5m^2 - 9m + 4)\mu^2 m'}{80\pi\hbar^2} f_{dir}(k_f\mu) + \frac{3S^2(1 - 10m^2 + 10m)\mu^2 m'}{16\pi\hbar^2} f_{ind}(\mu k_f) + \\
& + S^2(5m^2 - m) \frac{3\mu^3 m'}{16\hbar^2\pi^6} g_{dir}(\mu k_f).
\end{aligned} \tag{3.69}$$

I parametri (2.63-2.65), scelti in modo tale da riprodurre alcune proprietà della materia nucleare in approssimazione HF, non sono più adeguati una introdotte le correzioni al secondo ordine perturbativo. È stato dunque necessario definire dei nuovi valori per S , m e μ , servendosi dei vincoli definiti nel paragrafo 2.1.2:

$$S = -351.177 \text{ MeV}, \tag{3.70}$$

$$m = 1.27106, \tag{3.71}$$

$$\mu = 0.8. \tag{3.72}$$

In figura 3.2 sono mostrati i contributi relativi al primo² e al secondo termine perturbativo. La loro somma rappresenta proprio l'equazione di stato (3.69), mostrata in figura 3.3. Come si può notare il contributo relativo al secondo ordine è molto grande, solo qualche MeV inferiore al contributo in approssimazione HF. Questo comportamento evidenzia il carattere non perturbativo del modello. Per densità inferiori alla densità di saturazione i due termini mostrano lo stesso andamento, mentre al di sopra di questo valore entrambi crescono linearmente, ma la dipendenza del termine HF dalla densità è molto più forte rispetto a quella del secondo termine.

3.3.2 Proprietà di singola particella

Analogamente a quanto osservato nel calcolo dell'energia del sistema, anche per l'energia di singola particella il doppio scambio dei momenti delle particelle³ provoca una divisione dell'auto-energia in tre contributi. Tenendo conto di quanto detto in (3.15-3.16) l'auto-energia totale per un potenziale Brink&Boeker, data dalla somma tra (3.11) e (3.12), diventa

²In questo termine è incluso anche il contributo dell'energia cinetica.

³Dovuto alla natura fermionica dei nucleoni e alla forma del potenziale a due corpi.

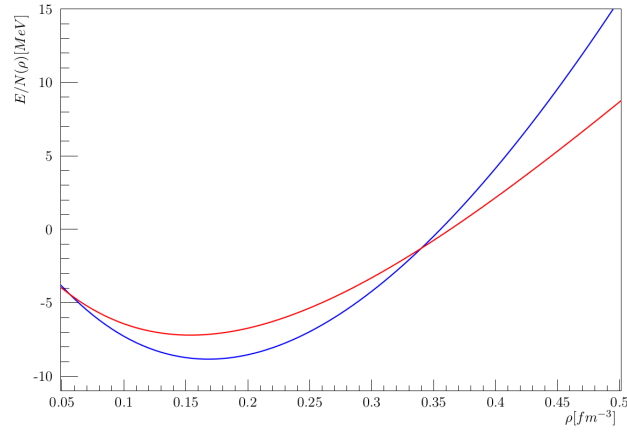


Figura 3.2: Contributo all'equazione di stato dei termine cinetico e HF (Blu) e dei termini associati al secondo ordine perturbativo (Rosso). Grafico preso da [16].

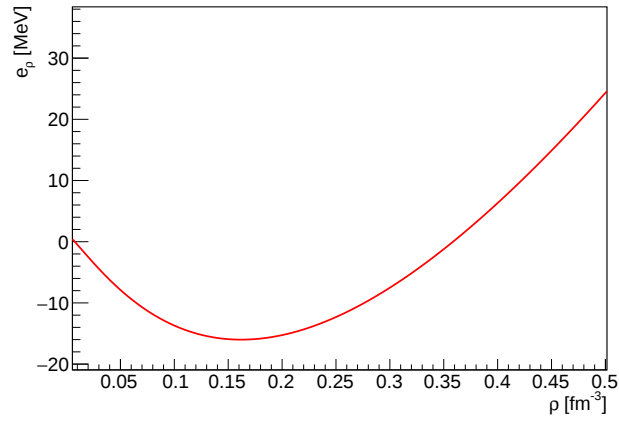


Figura 3.3: Equazione di stato arrestata al secondo ordine perturbativo.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{(2)}^{BB} &= \Sigma_{klmn}^{BB} + \Sigma_{klnm}^{BB} = \sum_{\substack{\vec{l}, \vec{q} \\ |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{k}+\vec{q}|, |\vec{l}-\vec{q}| > k_f}} \frac{4V_{klmn}^2 - V_{klmn}V_{klnm}}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_{k+q} - \epsilon_{l-q}} \\
&= S^2 (5m^2 - 9m + 4) \sum_{\substack{\vec{l}, \vec{q} \\ |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{k}+\vec{q}|, |\vec{l}-\vec{q}| > k_f}} \frac{|\langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | mn \rangle|^2}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_{k+q} - \epsilon_{l-q}} \quad (3.73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ S^2 (-1 - 10m^2 + 10m) \sum_{\substack{\vec{l}, \vec{q} \\ |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{k}+\vec{q}|, |\vec{l}-\vec{q}| > k_f}} \frac{\langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | mn \rangle \langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | nm \rangle}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_{k+q} - \epsilon_{l-q}} \\
&\quad (3.74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ S^2 (5m^2 - m) \sum_{\substack{\vec{l}, \vec{q} \\ |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{k}+\vec{q}|, |\vec{l}-\vec{q}| > k_f}} \frac{|\langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | nm \rangle|^2}{\epsilon_k + \epsilon_l - \epsilon_{k+q} - \epsilon_{l-q}} \quad (3.75)
\end{aligned}$$

$$= \Sigma_1^{BB} + \Sigma_2^{BB} + \Sigma_3^{BB} \quad (3.76)$$

dove gli elementi di matrice proiettati sugli autostati della posizione assumono una forma analoga a (3.37), (3.50) e (3.62) rispettivamente.

Anche in questo caso sono stati studiati separatamente i tre termini (3.73-3.75)

Termine Diretto

Il contributo all'auto-energia del termine (3.73)

$$\begin{aligned}
\Sigma_1^{BB} &= -S^2 (3m^2 - 5m + 2) \frac{\pi^3 \mu^6 m'}{\Omega^2 \hbar^2} \sum_{\substack{\vec{q}, \vec{l} \\ |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{l}-\vec{q}|, |\vec{k}+\vec{q}| > k_f}} \frac{e^{-q^2 \frac{\mu^2}{2}}}{\vec{q} (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})} \\
&= -S^2 (3m^2 - 5m + 2) \frac{\pi^3 \mu^6 m'}{\Omega^2 \hbar^2} \frac{\Omega^2}{(2\pi)^3} \int_{\substack{|\vec{l}| < k_f \\ |\vec{l}-\vec{q}|, |\vec{k}+\vec{q}| > k_f}} d^3 \vec{q} d^3 \vec{l} \frac{e^{-q^2 \frac{\mu^2}{2}}}{\vec{q} (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})} \\
&= -S^2 (3m^2 - 5m + 2) \frac{\mu^6 m'}{8 \hbar^2} k_f^4 \int_{\substack{|\vec{l}| < 1 \\ |\vec{l}-\vec{q}|, |\vec{k}+\vec{q}| > 1}} d^3 \vec{q} d^3 \vec{l} \frac{e^{-q^2 \frac{x^2}{2}}}{\vec{q} (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo posto $\vec{q}' = \frac{\vec{q}}{k_f}$, $\vec{k}' = \frac{\vec{k}}{k_f}$, $\vec{l}' = \frac{\vec{l}}{k_f}$, $x = \mu k_f$ cambiando anche i differenziali corrispondenti.

L'integrale presente in (3.77) è stato poi sviluppato utilizzando ancora una volta il metodo di Euler [24], tenendo però conto del fatto che in questo caso il momento $\vec{k}$ ha un ruolo puramente parametrico con valori permessi all'interno della sfera di Fermi, e non rappresenta quindi una variabile di integrazione. Facendo uso della trasformata di Laplace (3.43) ed effettuato il cambio dalla variabile α a $y = \alpha |\vec{q}|$ si ottiene

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|\vec{k}+\vec{q}|>1} d^3 \vec{q} e^{-\frac{q^2}{2\mu^2}} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(q^2 + kq \cos \theta)} \int_{\substack{|\vec{l}| < 1 \\ |\vec{l}-\vec{q}| > 1}} d^3 \vec{l} e^{-\alpha \vec{q} \cdot \vec{l}} \\
&= 2\pi \int_0^2 dq q^2 \int_0^\pi d(\cos \theta) e^{-\frac{q^2}{2\mu^2}} \int_0^\infty \frac{dy}{q} e^{-y(q+k \cos \theta)} \frac{2\pi}{y^3} \left(e^{\frac{yq}{2}} qy + (e^{-y} - e^{y(q-1)}) (1+y) \right) \\
&\quad + 2\pi \int_2^\infty dq q^2 \int_0^\pi d(\cos \theta) e^{-\frac{q^2}{2\mu^2}} \int_0^\infty \frac{dy}{q} e^{-y(q+k \cos \theta)} \frac{2\pi}{y^3} (e^y (y-1) + e^{-y} (y+1))
\end{aligned} \tag{3.78}$$

dove nel prodotto $kq \cos \theta$ si è posta la direzione dell'asse z lungo $\vec{k}$, e θ rappresenta l'angolo compreso tra $\vec{q}$ e tale asse. È stato possibile risolvere

l'integrale in $d^3\vec{l}$ dividendo l'intervallo di integrazione di $|\vec{q}|$ in $[0, 2]$ e $[2, \infty]$.
Le difficoltà presentatesi nel calcolo di questo integrale non hanno permesso di raggiungere risultati numerici nè tantomeno analitici.

Termine di scambio

Con calcoli analoghi a quelli effettuati per il termine diretto, il contributo di scambio (3.74) all'auto-energia risulta

$$\Sigma_2^{BB} = S^2(-1 - 6m^2 + 6m) \frac{1}{\Omega^2} \mu^6 \pi^3 \sum_{\substack{\vec{q}, \vec{l} \\ |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{l} - \vec{q}|, |\vec{k} + \vec{q}| > k_f}} \frac{e^{-\left[\frac{q^2 \mu^2}{4} + (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})^2 \frac{\mu^2}{4}\right]}}{\frac{\hbar^2}{2m'} (k^2 + q^2 - (\vec{q} - \vec{l})^2 - (\vec{q} + \vec{k})^2)} \quad (3.79)$$

$$= -S^2(-1 - 6m^2 + 6m) \frac{\mu^6 \pi^3}{\Omega^2} \frac{m'}{\hbar^2} \frac{\Omega^2 k_f^4}{(2\pi)^3} \int_{\substack{|\vec{l}| < 1 \\ |\vec{l} - \vec{q}|, |\vec{k} + \vec{q}| > 1}} d^3\vec{q} d^3\vec{l} \frac{e^{-\left[\frac{q^2 \mu^2}{4} + (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})^2 \frac{\mu^2}{4}\right]}}{(k^2 + q^2 - (\vec{q} - \vec{l})^2 - (\vec{q} + \vec{k})^2)} \quad (3.80)$$

$$= -S^2(-1 - 6m^2 + 6m) \frac{\mu^6 m'}{8\hbar^2} k_f^4 \int_{\substack{|\vec{l}| < 1 \\ |\vec{l} - \vec{q}|, |\vec{k} + \vec{q}| > 1}} d^3\vec{q} d^3\vec{l} \frac{e^{-\left[\frac{q^2 \mu^2}{4} + (\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})^2 \frac{\mu^2}{4}\right]}}{\vec{q}(\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})}. \quad (3.81)$$

Anche in questo caso non è stato possibile risolvere l'integrale in maniera analitica o computazionale, sempre per le difficoltà riscontrate nel termine diretto.

Terzo termine

Anche per il terzo termine del contributo all'auto-energia (3.75) sono stati svolti i calcoli fino al calcolo dell'integrale:

$$\begin{aligned}
\Sigma_3^{BB} &= S^2(3m^2 - m) \frac{\mu^6 \pi^3}{\Omega^2} \sum_{\substack{\vec{q}, \vec{l} \\ |\vec{l}| < k_f \\ |\vec{l}-\vec{q}|, |\vec{k}+\vec{q}| > k_f}} \frac{e^{-(\vec{q}+\vec{k}-\vec{l})^2 \frac{\mu^2}{2}}}{\frac{\hbar^2}{2m'}(k^2 + q^2 - (\vec{q}-\vec{l})^2 - (\vec{q}+\vec{k})^2)} \\
&= S^2(3m^2 - m) \frac{\mu^6 \pi^3}{\Omega^2} \frac{\Omega^2}{(2\pi)^3} \int_{\substack{|\vec{l}| < 1 \\ |\vec{l}-\vec{q}|, |\vec{k}+\vec{q}| > 1}} d^3 \vec{q} d^3 \vec{l} \frac{e^{-(\vec{q}+\vec{k}-\vec{l})^2 \frac{x^2}{2}}}{\frac{\hbar^2}{2k_f^4 m'}(k^2 + q^2 - (\vec{q}-\vec{l})^2 - (\vec{q}+\vec{k})^2)} \\
&= -S^2(3m^2 - m) \frac{\mu^6 m'}{8\hbar^2} k_f^4 \int_{\substack{|\vec{l}| < 1 \\ |\vec{l}-\vec{q}|, |\vec{k}+\vec{q}| > 1}} d^3 \vec{q} d^3 \vec{l} \frac{e^{-(\vec{q}+\vec{k}-\vec{l})^2 \frac{x^2}{2}}}{\vec{q}(\vec{q} + \vec{k} - \vec{l})}. \quad (3.82)
\end{aligned}$$

Come nei casi precedenti, anche per il terzo termine sono state riscontrate delle difficoltà che non hanno permesso di proseguire nel calcolo.

Nonostante le approssimazioni adottate in materia nucleare uniforme, il calcolo della auto-energia non ha dato esito positivo per i suoi tre termini, sia attraverso metodi analitici che numerici.

Si è quindi pensato di adottare due nuove approssimazioni:

1. il range di interazione μ può essere considerato molto più piccolo rispetto alla distanza media tra i nucleoni $r_m \propto \rho^{-\frac{1}{3}}$. Nelle condizioni di saturazione che sono state considerate in questo lavoro può quindi assumere un valore di μ con un ordine di grandezza minore di 1 fm;
2. ipotizzando che le particelle che interagiscono tra loro siano solo quelle giacenti sulla superficie di Fermi, il momento trasferito $\vec{q}$ può assumere in modulo solo valori compresi nell'intervallo $[0, 2k_f]$. Vale dunque l'approssimazione per cui la lunghezza d'onda associata all'onda piana di momento $\vec{q}$, $\lambda = 2\pi/|\vec{q}|$, è molto maggiore rispetto alle lunghezze caratteristiche del problema;

Questo sistema, chiamato *liquido di Fermi* [29], permette di trattare gli elementi di matrice dell'interazione in maniera alquanto semplificata rispetto a quanto fatto finora. Infatti dato un potenziale di interazione a due corpi di forma gaussiana come il potenziale Brink&Boeker, sia per il termine di

scambio che per quello diretto, a meno di diversi coefficienti numerici risulta

$$\langle kl | e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} | mn \rangle = \int_{\Omega} \int_{\Omega} d^3 \vec{r}_1 d^3 \vec{r}_2 \frac{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{-i\vec{l} \cdot \vec{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{\mu^2}} \frac{e^{i(\vec{k} + \vec{q}) \cdot \vec{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{i(\vec{l} - \vec{q}) \cdot \vec{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} \quad (3.83)$$

$$= \frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} d^3 \vec{r}_1 d^3 \vec{r}_2 e^{-\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{\mu^2}} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \quad (3.84)$$

$$= \frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} d^3 \vec{R} d^3 \vec{r} e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \quad (3.85)$$

$$= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} d^3 \vec{r} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (3.86)$$

dove nel passaggio da (3.84) a (3.85) è stato effettuato un cambio di variabili nel sistema relativo e del centro di massa analogo a (3.3), che non cambia la regione di integrazione per la proprietà di invarianza traslazionale in materia nucleare simmetrica. Grazie alla prima approssimazione il termine gaussiano risulta essere molto piccolo e può essere considerato come una delta di Dirac centrata in zero. Per quanto riguarda invece l'onda piana di momento $\vec{q}$, il suo contributo può essere considerato unitario grazie alla seconda approssimazione fatta. Come risultato il termine (3.86) diventa un valore costante.

Per questo sistema abbiamo adattato la soluzione proposta in [30] ad un sistema di materia nucleare, in cui è necessario tener conto, oltre agli spin delle particelle, anche del loro isospin. Attraverso un procedimento di ri-normalizzazione del potenziale di interazione è possibile, in questo modello semplificato, sostituire all'interazione vera e propria un valore costante che consenta di applicare la teoria delle perturbazioni. La semplice assunzione di un'interazione con una forza costante non sarebbe sufficiente, in quanto di per sé il potenziale nucleare non ha una natura perturbativa per via del rapido incremento della forza a due corpi a brevi distanze. Una quantità che può essere utilizzata come coefficiente perturbativo è la lunghezza di diffusione, che in approssimazione di Born vale

$$a = \frac{mU_0}{4\pi\hbar^2}. \quad (3.87)$$

Nel caso di un potenziale a due corpi di tipo Brink&Boeker la quantità U_0 è il parametro S che rappresenta l'intensità dell'interazione. L'espressione della massa efficace al secondo ordine perturbativo in approssimazione a liquido di Fermi per la materia nucleare simmetrica vale quindi:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + 3 \cdot \frac{8}{15\pi^2} (7 \ln 2 - 1) (ak_f)^2, \quad (3.88)$$

dove il fattore 3 è il contributo degenerativo portato da spin e isospin a causa dello scambio dei momenti delle particelle. Questa semplificazione

restituisce un valore della quantità m^*/m coerente con le dimensioni attese, tuttavia, forse a causa dei molti rimaneggiamenti, non rappresenta ancora un buon modello per descrivere le proprietà di singola particella in materia nucleare alla densità di saturazione.

Capitolo 4

Conclusioni

Nel corso degli anni le teorie di campo medio hanno raggiunto risultati sempre migliori in quanto a capacità predittive sui sistemi a molti corpi. Il modello Hartree-Fock, partendo da un potenziale a due corpi costruito *ad hoc*, definisce un potenziale efficace statico mediato su esse che permette di trattare il problema nucleare a molti corpi come prodotto di problemi di singola particella. Nel primo capitolo della tesi sono state illustrate alcune proprietà riguardando il sistema in cui si sono svolti i calcoli: la materia nucleare simmetrica, un sistema ideale infinito composto da un numero di protoni pari a quello di neutroni, in cui viene trascurata l'interazione coulombiana. È stato introdotto il concetto di saturazione nucleare, configurazione che, come evidenziato dagli esperimenti di scattering elettronico, può essere comparata in prima approssimazione alla condizione che si presenta all'interno dei nuclei con molti nucleoni. Per ultimo è stata presentata l'approssimazione di particelle indipendenti, all'interno della quale operano le approssimazioni di campo medio, che tratta la funzione d'onda che descrive lo stato del sistema come il prodotto antisimmetrizzato delle funzioni d'onda dei singoli nucleoni, che per le simmetrie della materia nucleare sono onde piane.

Nel secondo capitolo è stato introdotto nel dettaglio il modello di Hartree-Fock, in materia nucleare simmetrica:

- per prima cosa sono stati presentati alcuni modelli di interazione a due corpi con cui potrebbero essere affrontati i calcoli, tra i quali il potenziale di Brink&Boeker che riproduce tramite due contributi gaussiani il comportamento attrattivo tra nucleoni a medio range e quello fortemente repulsivo a piccole distanze reciproche;
- è stato caratterizzato il modello Hartree-Fock e come è possibile ricavare da esso le proprietà collettive per un sistema di nucleoni e quelle di singola particella. Per quanto riguarda queste ultime, ricavate sfruttando la rappresentazione pittorica dei diagrammi di Feynman, è stato

definito il concetto di nonlocalità nello spazio e nel tempo ed introdotta la quantità chiamata massa efficace, grazie alla quale è possibile riscrivere la forma dell'energia di singola particella in modo tale che venga messa in evidenza la densità dei livelli energetici;

- infine sono stati mostrati i calcoli effettuati in [15] con il potenziale di Brink&Boeker illustrato in precedenza. I risultati ottenuti in approssimazione HF ben riproducono le quantità legate all'energia totale del sistema, mentre il valore ottenuto per la massa efficace oscilla alla saturazione intorno a 0.25, molto inferiore rispetto al valore oggi accettato per la materia nucleare. La motivazione di questo comportamento potrebbe ricercarsi nel fatto che con questo tipo di approssimazione non viene tenuto conto degli effetti di correlazione nel moto dei nucleoni;

Nel terzo capitolo si è quindi tenuto conto di questi effetti, trattando l'Hamiltoniana Hartree-Fock come termine imperturbato nell'ambito della teoria delle perturbazioni:

- come nel secondo capitolo è stato introdotto il calcolo perturbativo per stati di fermioni e si è mostrato il metodo per ricavare l'energia del sistema e di singola particella con un potenziale a due corpi generico;
- sono stati presentati i calcoli effettuati in [16] per l'energia del sistema calcolata con un'interazione di Brink&Boeker. Sono stati evidenziati gli effetti che questa nuova approssimazione ha su tale quantità e i miglioramenti per quanto riguarda le capacità predittive delle quantità empiriche;
- sono stati presentati i calcoli per il calcolo dell'energia di singola particella. Le condizioni emerse nel calcolo di questi integrali non hanno permesso di raggiungere un risultato numerico. Si è quindi pensato di adottare l'ulteriore approssimazione a liquido di Fermi, grazie alla quale è stata trovata una soluzione per il valore della massa efficace che tuttavia non è ancora in grado di riprodurre le proprietà di singola particella in materia nucleare simmetrica;

Appendice A

Metodo Hartree-Fock

Il successo del modello a shell nel descrivere il moto di protoni e neutroni all'interno del nucleo giustifica l'assunzione che ogni nucleone si muova indipendentemente dagli altri in un potenziale medio prodotto da tutti gli altri. Il metodo Hartree-Fock (HF) è un metodo autoconsistente che permette di ricavare tale potenziale efficace a partire dalla somma di tutte le possibili interazioni a due corpi per mezzo di un principio variazionale che sfrutta, come funzioni di prova, dei determinanti di Slater.

Il punto di partenza è l'Hamiltoniana imperturbata H_0 , che descrive il moto libero di N particelle, eventualmente soggette ad un potenziale locale esterno:

$$H_0 = \sum_i^N h(i) = \sum_i^N \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} + U_{ext}(i) \right), \quad (\text{A.1})$$

dove $\nabla_i^2 = \sum_{l=1}^3 \partial_{i,l} \partial_{i,l}$ rappresenta l'operatore laplaciano che fornisce il termine cinetico, mentre $U_{ext}(i)$ è il potenziale esterno agente sulla i -esima particella, che però non è presente nel caso nucleare. A tale sistema va poi aggiunto il contributo dovuto alle interazioni a due corpi $v(i, j)$:

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N v(i, j). \quad (\text{A.2})$$

Partendo da N autofunzioni iniziali di singola particella ϕ_i ortonormali, attraverso un metodo iterativo è possibile trovare l'insieme che minimizza il valore di aspettazione dell'Hamiltoniana. L'approssimazione attuata da questo modello, detta a *particelle indipendenti*, consiste nel fatto che la funzione d'onda totale venga sostituita con un determinante di Slater, una

combinazione antisimmetrica delle suddette funzioni di singola particella:

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} P_{\sigma}(\phi_1 \dots \phi_N) \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(\mathbf{r}_1) & \phi_2(\mathbf{r}_1) & \dots & \phi_N(\mathbf{r}_1) \\ \phi_1(\mathbf{r}_2) & \dots & \dots & \phi_N(\mathbf{r}_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_1(\mathbf{r}_N) & \phi_2(\mathbf{r}_N) & \dots & \phi_N(\mathbf{r}_N) \end{vmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (\text{A.5})$$

dove σ è la permutazione considerata e P_{σ} è l'operatore di scambio tra due stati di singola particella. Nello sviluppo del calcolo del valore di aspettazione dell'Hamiltoniana va tenuto conto che l'ortonormalità delle funzioni d'onda a singola particella garantisce che per H_0 , contenente tutti gli operatori ad un corpo, la permutazione σ sul bra sia la stessa di quella sul ket; invece per quanto riguarda gli operatori a due corpi, raccolti in H_1 , la permutazione sul bra può differire da quella sul ket al più per lo scambio di una sola coppia di particelle (i, j) . Si trova quindi (ponendo $U_{ext} = 0$):

$$\langle \Psi_{HF} | H_0 | \Psi_{HF} \rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma, \sigma'} (-1)^{\sigma + \sigma'} \sum_i^N \langle \phi_1 \dots \phi_N | P_{\sigma} h(i) P_{\sigma'} | \phi_1 \dots \phi_N \rangle \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma, \sigma'} (-1)^{\sigma + \sigma'} \sum_i^N \langle \phi_i | h(i) | \phi_i \rangle \quad (\text{A.7})$$

$$= \sum_i^N \langle \phi_i | h(i) | \phi_i \rangle, \quad (\text{A.8})$$

$$\langle \Psi_{HF} | H_1 | \Psi_{HF} \rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma, \sigma'} (-1)^{\sigma + \sigma'} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \langle \phi_1 \dots \phi_N | P_{\sigma} v(i, j) P_{\sigma'} | \phi_1 \dots \phi_N \rangle \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma, \sigma'} (-1)^{\sigma + \sigma'} \delta_{\sigma, \sigma'} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \langle \phi_i \phi_j | v(i, j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle \quad (\text{A.10})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \langle \phi_i \phi_j | v(i, j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle, \quad (\text{A.11})$$

in modo tale che

$$\begin{aligned}\langle \Psi_{HF} | H | \Psi_{HF} \rangle &= \langle \Psi_{HF} | H_0 | \Psi_{HF} \rangle + \langle \Psi_{HF} | H_1 | \Psi_{HF} \rangle \\ &= \sum_i^N \langle \phi_i | h(i) | \phi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \langle \phi_i \phi_j | v(i, j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle.\end{aligned}\tag{A.12}$$

Per calcolare il valore di aspettazione $E_{HF}[\phi_1 \dots \phi_N]$ occorre considerare il vincolo di ortonormalità imposto sulle autofunzioni di singola particella, condizione matematicamente soddisfatta mediante l'uso dei moltiplicatori di Lagrange ϵ_{ij} :

$$E_{HF}[\phi_1 \dots \phi_N] = \langle \Psi_{HF} | H | \Psi_{HF} \rangle - \epsilon_{ij}(\langle \phi_i | \phi_j - \delta_{ij}).\tag{A.14}$$

Infine per ricavare le N equazioni HF, si cerca il minimo di tale funzionale attuando una variazione infinitesima $\delta\phi_i$ della i-esima autofunzione di singola particella ϕ_i , procedimento che porta a un set di N equazioni simili al problema di Schrödinger:

$$h(i) | \phi_i \rangle + \sum_j \langle \phi_j | v(i, j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle = \sum_j \epsilon_{ij} | \phi_j \rangle.\tag{A.15}$$

Poichè ogni combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione di queste equazioni, vi è un grado di libertà che permette di diagonalizzare la matrice. Moltiplicando a sinistra per $\langle \phi_i |$, l'equazione assume la forma

$$\langle \phi_i | h(i) | \phi_i \rangle + \sum_j \langle \phi_i \phi_j | v(i, j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle = \epsilon_i.\tag{A.16}$$

Un importante risultato circa l'energia totale ottenuta con il metodo HF è che

$$E_{esatta} = E_{HF} + E_{corr} \geq E_{HF},\tag{A.17}$$

dove E_{corr} rappresenta l'energia di correlazione, ovvero quella porzione di energia, di cui HF non tiene conto, generata dal fatto che il moto della i-esima particella perturba quello delle restanti N-1, alterando il campo medio.

Appendice B

Teoria delle perturbazioni

I metodi perturbativi sono strumenti utili per risolvere la maggior parte dei problemi fisici, dal momento che quelli risolubili esattamente sono molto pochi.

In questa appendice viene discussa la teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo, particolarmente utili nella risoluzione di problemi di stato legato, nel caso in cui lo spettro dell'Hamiltoniana imperturbata sia non degenera ($E_n^{(0)} \neq E_m^{(0)}, \forall m \neq n$).

Consideriamo un sistema in cui l'Hamiltoniana può essere scritta come la somma di un termine H_0 , il cui spettro è noto esattamente e ortonormalizzato

$$\begin{cases} H_0 |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(0)}\rangle \\ \langle m^{(0)} | n^{(0)} \rangle = \delta_{mn} \end{cases}, \quad (\text{B.1})$$

e un termine H' , in presenza del quale lo spettro non è più determinabile esattamente.

L'idea del metodo perturbativo è di pesare il contributo di H' con un parametro ϵ , e di determinare autofunzioni e autovalori dell'Hamiltoniana completa

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (\text{B.2})$$

come uno sviluppo in serie di ϵ , scrivendo l'Hamiltoniana come

$$H = H_0 + \epsilon H', \quad (\text{B.3})$$

e sviluppando autovalori e autovettori Eq. (B.2) dell'Hamiltoniana completa Eq. (B.3) in serie di ϵ :

$$E_n = E_n^{(0)} + \epsilon E_n^{(1)} + \epsilon^2 E_n^{(2)} + \dots \quad (\text{B.4})$$

$$|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + \epsilon |n^{(1)}\rangle + \epsilon^2 |n^{(2)}\rangle + \dots \quad (\text{B.5})$$

È importante osservare che in generale nulla garantisce che la serie perturbativa per l'autovalore o l'autostato converga.

Sostituendo gli sviluppi (B.4,B.5) nell'equazione (B.3) si ottiene

$$(H_0 + \epsilon H')(|n^{(0)}\rangle + \epsilon |n^{(1)}\rangle + \epsilon^2 |n^{(2)}\rangle + \dots) = (E_n^{(0)} + \epsilon E_n^{(1)} + \epsilon^2 E_n^{(2)} + \dots)(|n^{(0)}\rangle + \epsilon |n^{(1)}\rangle + \epsilon^2 |n^{(2)}\rangle + \dots). \quad (\text{B.6})$$

Una volta identificati i termini dello stesso ordine in ϵ si ottiene una sequenza di equazioni

$$\epsilon^0 (H_0 - E_n^{(0)}) |n^{(0)}\rangle = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\epsilon^1 (H_0 - E_n^{(0)}) |n^{(1)}\rangle = (E_n^{(1)} - H') |n^{(0)}\rangle \quad (\text{B.8})$$

$$\epsilon^2 (H_0 - E_n^{(0)}) |n^{(2)}\rangle = (E_n^{(1)} - H') |n^{(1)}\rangle + E_n^{(2)} |n^{(0)}\rangle \quad (\text{B.9})$$

$\vdots$

$$\epsilon^k (H_0 - E_n^{(0)}) |n^{(k)}\rangle = (E_n^{(1)} - H') |n^{(k-1)}\rangle + \sum_{l=2}^k E_n^{(l)} |n^{(k-l)}\rangle. \quad (\text{B.10})$$

La soluzione di (B.7-B.10) può essere ottenuta proiettando ciascuna equazione sugli autostati $|n^{(0)}\rangle$ dell'Hamiltoniana imperturbata. A tal fine tutti i termini successivi al primo nello sviluppo perturbativo dello stato B.5 possono essere scelti ortogonali al primo ¹:

$$\langle n^{(0)} | n^{(i)} \rangle = 0, \quad \forall i \neq 0. \quad (\text{B.11})$$

Proiettando dunque su $|n^{(0)}\rangle$ le (B.7-B.10), tutti i membri di sinistra si annullano, così come tutti i contributi a destra non proporzionali a $E_n^{(k)}$. Supponendo che gli stati siano normalizzati, risulta:

$$E_n^{(1)} = \langle n^{(0)} | H' | n^{(0)} \rangle \quad (\text{B.12})$$

$$E_n^{(2)} = \langle n^{(0)} | H' | n^{(1)} \rangle \quad (\text{B.13})$$

$\vdots$

$$E_n^{(k)} = \langle n^{(0)} | H' | n^{(k-1)} \rangle. \quad (\text{B.14})$$

¹Se $|n^{(i)}\rangle$ è soluzione della i-esima equazione (B.7-B.10) allora lo è anche $|\tilde{n}^{(i)}\rangle = |n^{(i)}\rangle + \lambda |n^{(0)}\rangle$. Infatti

$$(H_0 - E_n^{(0)}) |\tilde{n}^{(1)}\rangle = \lambda (H_0 - E_n^{(0)}) |n^{(0)}\rangle + (H_0 - E_n^{(0)}) |n^{(1)}\rangle = (H_0 - E_n^{(0)}) |n^{(1)}\rangle,$$

e quindi il membro sinistro della i-esima equazione coincide se valutato per $|n^{(i)}\rangle$ e $|\tilde{n}^{(i)}\rangle$. Pertanto, data una soluzione $\tilde{n}^{(i)}$ della i-esima equazione tale che $\langle \tilde{n}^{(i)} | n^{(0)} \rangle \neq 0$ è possibile costruirne una nuova $|n^{(i)}\rangle$, anch'essa soluzione della i-esima equazione, tale che sia soddisfatta la condizione di ortonormalità, ponendo $|n^{(i)}\rangle = |\tilde{n}^{(i)}\rangle + \lambda_i |n^{(0)}\rangle$ e scegliendo

$$\lambda_i = -\langle n^{(0)} | \tilde{n}^{(i)} \rangle.$$

Per il primo ordine la correzione all'energia dell'Hamiltoniana imperturbata corrisponde ai termini di H' diagonali negli autostati di H_0 .

Per calcolare la correzione al secondo ordine $E_n^{(2)}$ è necessario ricavare la correzione all'autostato usando (B.8), che si risolve moltiplicando entrambi i membri per l'inverso di $(H_0 - E_n^{(0)})$. Nello spazio degli stati fisici però $(H_0 - E_n^{(0)})|n^{(0)}\rangle = 0$, e per l'esistenza di un autovalore nullo non sarebbe possibile invertire tale operatore. Tuttavia la (B.11) implica che tutte le $|n^{(i)}\rangle$, e quindi in particolare anche $|n^{(1)}\rangle$, appartengono al sottospazio ortogonale ad $|n^{(0)}\rangle$, pertanto è possibile riscrivere $|n^{(1)}\rangle$ come

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_k |k^{(0)}\rangle \langle k^{(0)}|n^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq n} |k^{(0)}\rangle \langle k^{(0)}|n^{(1)}\rangle, \quad (\text{B.15})$$

A questa risoluzione dell'identità contribuiscono tutti gli stati tranne $|n^{(0)}\rangle$. Dunque $(H_0 - E_n^{(0)})^{-1}$ esiste nello spazio degli stati ortogonale a $|n^{(0)}\rangle$.

Sfruttando la proprietà generale $f(H_0)|k^{(0)}\rangle = f(E_k^{(0)})|k^{(0)}\rangle$, in tale sottospazio si ha

$$|n^{(1)}\rangle = \frac{1}{H_0 - E_n^{(0)}}(E_n^{(1)} - H')|n^{(0)}\rangle \quad (\text{B.16})$$

$$= \sum_{k \neq n} \frac{1}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} |k^{(0)}\rangle \langle k^{(0)}|(E_n^{(1)} - H')|n^{(0)}\rangle \quad (\text{B.17})$$

$$= \sum_{k \neq n} \frac{1}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} |k^{(0)}\rangle [\delta_{kn} E_n^{(1)} - \langle k^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle] \quad (\text{B.18})$$

$$= \sum_{k \neq n} \frac{\langle k^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}} |k^{(0)}\rangle. \quad (\text{B.19})$$

La perturbazione modifica lo stato di partenza aggiungendo ad esso componenti lungo tutte le altre direzioni (gli altri autostati imperturbati) nello spazio di Hilbert. la componente lungo una direzione $|k^{(0)}\rangle$ è tanto minore quanto più è diverso l'autovalore di energia.

La correzione all'energia diventa, per il secondo ordine

$$E_n^{(2)} = \langle n^{(0)}|H' \sum_{k \neq n} \frac{\langle k^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle}{H_0 - E_n^{(0)}} |k^{(0)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{\langle n^{(0)}|H'|k^{(0)}\rangle \langle k^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}, \quad (\text{B.20})$$

e conseguentemente l'energia di ground state:

$$E_{GS} = \langle n^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\langle n^{(0)}|H'|k^{(0)}\rangle \langle k^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle}{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}. \quad (\text{B.21})$$

Bibliografia

- [1] R. Machleidt, *The high-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential (CD-Bonn)*, Phys.Rev. C63, 024001 (2001), DOI:10.1103/PhysRevC.63.024001
- [2] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, R. Schiavilla, *An accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking*, Phys. Rev. C 51, 38 (1995)
- [3] Ceperley, David, and B. Alder., *Quantum monte carlo* Science 231 (1986).
- [4] Steven C. Pieper, K. Varga, R. B. Wiringa, Quantum Monte Carlo calculations of A=9,10 nuclei, Phys. Rev. C 66, 044310 (2002), DOI:<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.66.044310>.
- [5] Bruce R. Barrett, Petr Navrátil, James P. Vary, *Ab initio no core shell model*, Progress in Particle and Nuclear Physics Volume 69 pp 131-181 (2013) DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ppnp.2012.10.003>
- [6] T. H. R. Skyrme, *The effective nuclear potential*, Nucl. Phys. 9.4, pp. 615 –634 (1958–1959)
- [7] R. Sellahewa, A. Rios, *Isovector properties of the Gogny interaction*, Phys. Rev. C 90,054327 (2014), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.90.054327>
- [8] D.M. Brink, E. Boeker, *Effective interactions for Hartree-Fock calculations*, Nucl. Phys. Volume 91 (1967), DOI: 10.1016/0375-9474(67)90446-0
- [9] W. Kohn, L.J. Sham, *Self-Consistent Equations Including Exchange and Correlation Effects*, Phys. Rev. Volume 140 (1965)
- [10] O.Benhar, *Lectures given at Conference: C09-02-02.1*, (2009)
- [11] K. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons Inc (1987)

- [12] N. Alam, B. K. Agrawal, J. N. De, S. K. Samaddar, G Colò, *Equation of state of nuclear matter from empirical constraints*, Phys. Rev. C 90, 054317 (2014), DOI:<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.90.054317>.
- [13] R.C. Barret, D.F. Jackson, *Nuclear sizes and structure*, Oxford: Clarendon (1977)
- [14] D. Vauterin, D.M. Brink, *Hartree-Fock Calculations with Skyrme's Interaction. I. Spherical Nuclei*, Phys. Rev. C 5, 626 (1972), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.5.626>
- [15] G.Accorto, *Sensitivity of Nuclear Matter Properties to the Range of the Effective Interaction*, Tesi di laurea triennale per la facoltà di Fisica dell'Università degli Studi di Milano, non pubblicato (2015)
- [16] R.Romano, *Contributo dell'energia di correlazione all'equazione di stato della materia nucleare*, Tesi di laurea triennale per la facoltà di Fisica dell'Università degli Studi di Milano, non pubblicato (2015)
- [17] R. D. Mattuck, *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*, Dover Publications Inc., New York, United States (1992)
- [18] P. Ring and P. Schuck. *The Nuclear Many-Body Problem (Theoretical and Mathematical Physics)*. Springer,(2005)
- [19] M.N. Harakeh, A. van der Woude, *Giant Resonances-Fundamental High-Frequency Modes of Nuclear Excitation*, Oxford Studies in Nuclear Physics (2001)
- [20] E. Khan, J. Margueron, I. Vidaña. *Constraining the Nuclear Equation of State at Subsaturation Densities*, Phys. Rev. Lett. 109 (2012), p. 092501. DOI : 10.1103/PhysRevLett.109.092501
- [21] T. Frick, Kh. Gad, H. Müther, P. Czerski, *Nuclear self-energy and realistic interactions*, Phys Rev. C, VOLUME 65, 034321 (2002), DOI: 10.1103/PhysRevC.65.034321
- [22] R. Sartor, G. Mahaux, *Self-energy, momentum distribution, and effective masses of a dilute Fermi gas*, Phys Rev. C, VOLUME 21 (1980), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.21.1546>
- [23] J.P. Blaizot, *Nuclear compressibilities*, Phys. Rep. Volume 64, Issue 4, pages 171–248 (1980), DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(80\)90001-0](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(80)90001-0)
- [24] H. Euler, *Über die Art der Wechselwirkung in den schweren Atomkernen*, Zeitschrift für Physik Volume 105, Issue 9, pp 553-575 (1937), DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01371561>

- [25] M. Bender, P. H. Heenen, P. G. Reinhard, *Self-consistent mean-field models for nuclear structure*, Rev. Mod. Phys. 75, 121 (2003), DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.75.121>.
- [26] G. Peano, *Generalizzazione della formula di Simpson*, Estr. dagli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXII (1892)
- [27] A.L. Fetter, J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, Dover Books on Physics (2003)
- [28] C. Mahaux, P.F.Bortignon, C.H.Dasso, *Dynamics of the shell model*, Phys. Rep. Volume 120 ,Issue 1-4 , pp 1-274 (1985), DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(85\)90100-0](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(85)90100-0)
- [29] L. D. Landau, *The theory of a Fermi liquid*, Soviet Physics JETP-USSR 3.6 (1957): 920-925.
- [30] A. A. Abrikosov, I. M. Khalatnikov. *Concerning a model for a non-ideal Fermi gas*, Soviet Phys. JETP 6 (1958).