

Università degli Studi di Milano

Facoltà di Scienze e Tecnologie
Corso di Laurea Triennale in Fisica

ELABORATO DI LAUREA



**Rinormalizzazione di un Potenziale di Contatto
in un Sistema di Nucleoni
a Densità Uniforme**

Laureando:
Federica Muscolino
Matricola 775233

Relatore:
Prof. Gianluca Colò

Anno Accademico 2013-2014

Indice

Introduzione	1
1 Teorie di campo medio e oltre	3
1.1 Teorie di campo medio ed applicazione a sistemi nucleari	4
1.1.1 Metodo di Hartree-Fock	4
1.2 Random-Phase Approximation (RPA) e metodo di Hartree-Fock dipendente dal tempo	6
1.2.1 Formalismo buco-particella	6
1.2.2 Random-Phase Approximation	7
1.3 Modelli oltre il campo medio	9
1.3.1 Forza di Skyrme e cut-off ultravioletto	9
2 Applicazione a sistemi nucleari infiniti	11
2.1 Diagrammi di Feynman	12
2.1.1 Particelle e quasi particelle	12
2.1.2 Rappresentazione grafica per particelle classiche	12
2.1.3 Sistemi quantistici e propagatori	14
2.1.4 Regole di Feynman	20
2.2 Autoenergia di una particella in un sistema nucleare a densità uniforme	21
2.2.1 Massa efficace	21
2.2.2 Autoenergia	22
2.2.3 RPA per una nucleone in un sistema a densità uniforme . .	25
3 Calcolo della correzione dell'autoenergia al secondo ordine per- turbativo	29
3.1 Particelle <i>on-shell</i> ed <i>off-shell</i>	31
3.2 Svolgimento dell'integrale	32
3.2.1 Svolgimento dell'integrale nella variabile $\mathbf{l}$	33
3.2.2 Svolgimento dell'integrale nella variabile $\mathbf{q}$	36

4	Risultati numerici e rinormalizzazione	41
4.1	Criteri generali per la rinormalizzazione	41
4.2	Confronto numerico dei risultati per l'autoenergia	44
4.3	Rinormalizzazione	44
	Conclusioni	47
A	Soluzione completa del dominio di integrazione della variabile l	49
B	Soluzione completa del calcolo della correzione al secondo ordine perturbativo dell'autoenergia	53
B.1	Integrale in l per $q < 2k_F$	53
B.2	Integrale in l per $q > 2k_F$	54
	Ringraziamenti	56

Introduzione

Molti dei sistemi fisici di interesse sono sistemi quantistici a molti corpi (atomi, molecole, solidi, nuclei ecc.). In questi casi, a causa dell'elevato numero di corpi ed interazioni in gioco, però, non è possibile ricavarne le esatte proprietà, rendendo necessari metodi di approssimazione, spesso complicati.

Le difficoltà aumentano quando si tratta di un sistema nucleare, dal momento che la conoscenza delle forze nucleari, soprattutto nel mezzo nucleare rispetto al caso nel vuoto, non è sufficientemente dettagliata. Si sa solo che si tratta di forze a breve range. Per questo motivo, si usa spesso approssimare il potenziale di interazione tramite potenziali di contatto, gaussiani o di Yukawa.

Molte delle proprietà di questi sistemi sono previste dalle cosiddette teorie di campo medio, le quali permettono di calcolare l'energia totale considerando l'interazione media di una particella con tutte le altre (ovvero con la densità delle altre particelle). Tale ipotesi si può considerare il più basso (ovvero il primo) ordine perturbativo in uno sviluppo rispetto all'interazione nucleone-nucleone.

Un particolare modello di campo medio è quello di Hartree-Fock, il quale viene spesso utilizzato in fisica nucleare, poichè, come si vedrà nel paragrafo 1.1.1, risulta una buona approssimazione per questo tipo di sistemi, posto che si usi un'interazione efficace opportuna.

Esistono, comunque, proprietà che non sono descritte da teorie di campo medio, come gli accoppiamenti tra stati eccitati (fononi) o tra particella e singolo stato eccitato. Ne sono un esempio le *risonanze giganti*, ovvero fluttuazioni di densità di piccola ampiezza di cui si ha evidenza grazie agli esperimenti spettroscopici svolti su diversi nuclei.

Per questo motivo, sono state formulate delle teorie di oltre campo medio che prevedono di espandere i modelli di campo medio calcolando i contributi ad ordini superiori al primo.

Per quanto riguarda i sistemi nucleari, le teorie oltre campo medio aprono una questione tutt'ora discussa. Infatti, nel caso in cui si studi un sistema utilizzando un potenziale di contatto, il secondo ordine perturbativo presenta una divergenza lineare rispetto al momento trasferito dall'interazione, chiamata *divergenza ultravioletta*. Questo è dovuto al fatto che, in natura, le interazioni nucleari av-

vengono a distanze ben definite. Considerando il range di interazione nullo, invece, vengono coinvolte automaticamente energie nettamente superiori rispetto a quelle previste dalla fisica in esame, generando la divergenza. Una soluzione spesso adottata per contenere il problema prevede l'utilizzo di un *cut-off*, in modo da porre un limite ai momenti trasferiti. Poichè questo cut-off spesso non ha un significato fisico evidente, è necessario, come si vedrà nel corso dell'elaborato, *rinormalizzare* alcune quantità in modo che il risultato ottenuto possa riprodurre dati sperimentali di quantità osservabili per ogni valore del cut-off scelto.

Lo studio delle proprietà di questi sistemi nucleari (come anche elettronici) viene a volte fatto considerando come sistema semplificato quello a densità uniforme. Questo tipo di approssimazione agevola considerevolmente i calcoli, rendendo il sistema simmetrico dal punto di vista traslazionale e facendo sì che i nucleoni possano essere descritti tramite funzioni d'onda piane. Inoltre, non vi sono gli effetti di bordo.

In questo elaborato ci si è proposti di calcolare il contributo al secondo ordine perturbativo dell'energia di una particella in un sistema di nucleoni a densità uniforme approssimando le interazioni tramite un particolare potenziale di contatto, detto di *Skyrme*, spesso utilizzato in fisica nucleare. Qui ne verrà utilizzata una versione semplificata.

L'obiettivo è quello di capire se sia possibile calcolare tale contributo e, nel caso, se il risultato possa essere rinormalizzato, ottenendo dei risultati ragionevoli.

Il lavoro svolto è un esercizio propedeutico che si spera possa, in un futuro, servire come spunto per ricerche più approfondite e complete.

Capitolo 1

Teorie di campo medio e oltre

Lo studio dei sistemi a molti corpi è un argomento controverso, tutt'ora discusso in fisica [1]. La sua importanza deriva dal fatto che gran parte dei sistemi reali, come ad esempio solidi o liquidi, fanno parte di questa categoria di sistemi ed una loro descrizione completa richiederebbe la conoscenza delle proprietà di tutte le particelle ed interazioni in gioco. Poiché questo non è possibile, è necessario ricorrere allo studio di metodi approssimativi.

Un esempio di sistemi a molti corpi sono i sistemi nucleari, in cui la situazione è aggravata dal fatto che non si ha una sufficiente conoscenza delle forze di interazione nel mezzo nucleare. Poiché si tratta di interazioni forti a breve range, esse vengono spesso approssimate da un potenziale di contatto.

Tramite esperimenti di scattering e spettroscopici fatti su diversi nuclei, vengono costantemente osservati numerosi fenomeni; una loro maggiore comprensione permetterebbe di migliorare la conoscenza della dinamica delle particelle del sistema e delle loro interazioni.

Vi sono certi modelli, chiamati *modelli di campo medio*, i quali permettono di descrivere alcuni dei fenomeni osservati sperimentalmente; in particolare, esiste un modello importante per la descrizione di sistemi in cui le particelle possono essere considerate in prima approssimazione indipendenti, ovvero il modello di Hartree-Fock. Nel paragrafo 1.1 verrà data una breve descrizione di quest'ultimo, discutendone l'applicazione al caso nucleare.

Come si vedrà in seguito, esistono altri fenomeni che non possono essere descritti tramite modelli di campo medio. È necessario, dunque, ricorrere ad altri metodi al di là di quelli di campo medio.

1.1 Teorie di campo medio ed applicazione a sistemi nucleari

L'utilità dell'approssimazione di campo medio deriva dal fatto che essa permette di approssimare le interazioni di una singola particella con tutte le altre tramite un potenziale medio efficace agente su di essa. Il modello di Hartree-Fock è un tipo di approssimazione di campo medio che considera, quindi, le particelle del sistema in prima approssimazione tra loro indipendenti. Esso consiste nel calcolare una funzione d'onda approssimata per la singola particella partendo dalla funzione d'onda totale del sistema considerata come una combinazione di autostati di particelle indipendenti. Tramite la funzione d'onda di singola particella ricavata è possibile ottenere un potenziale medio efficace agente sulla singola particella. In questo senso, il metodo è *autoconsistente*.

Questo tipo di approccio può essere utilizzato per approssimare diversi sistemi fisici, tra cui i sistemi nucleari. Infatti, com'è noto dagli esperimenti di scattering [2, pagg. 165, 166], in gran parte dei nuclei il libero cammino medio dei nucleoni è abbastanza grande, dell'ordine delle dimensioni del nucleo; questo fa sì che i nucleoni possano essere considerati, in prima approssimazione, come particelle tra loro indipendenti. A causa della scarsa conoscenza delle interazioni tra nucleoni, si usa spesso approssimare il potenziale agente tra particelle ad un potenziale a range nullo, oppure potenziali di tipo gaussiano o di Yukawa [3].

1.1.1 Metodo di Hartree-Fock

Un sistema a molti corpi può essere descritto tramite un'Hamiltoniana del tipo

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + V$$

in cui T_i è l'operatore di energia cinetica della particella i e V è una funzione che descrive il potenziale di interazione tra particelle.

Supponiamo di considerare solo interazioni a due corpi, ottenendo una forma semplificata per l'Hamiltoniana

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \quad (1.1)$$

V_{ij} rappresenta l'elemento di matrice dell'operatore del potenziale di interazione relativo alle particelle i e j .

Aggiungendo e togliendo i termini del potenziale medio efficace (U_i) per ogni particella i , si ottiene la seguente espressione:

$$H = \sum_{i=1}^A [T_i + U_i] + V_{res} \quad (1.2)$$

in cui appare il termine $V_{res} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} - \sum_{i=1}^A U_i$, ovvero la parte di potenziale non descritta dal potenziale medio.

Se V_{res} è abbastanza piccolo, esso può essere trascurato; questo semplifica enormemente il problema. Però viene, così, trascurata parte della dinamica del sistema. A questo punto, la funzione d'onda totale del sistema può essere scelta tramite il determinante di Slater di una base completa di autofunzioni ortonormali di particelle singole indipendenti, dato che questa è la forma più generale per descrivere un sistema fermioni indipendenti

$$\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_a) = N \phi_1(\mathbf{r}_1) \dots \phi_a(\mathbf{r}_a) \quad (1.3)$$

Il problema di Hartee-Fock si definisce attraverso il metodo variazionale che prevede che l'energia in termini della funzione d'onda ψ ($E[\psi]$) sia stazionaria per piccole variazioni di ψ ($\delta\psi$)¹:

$$\delta E[\psi] = \delta \langle \psi | H | \psi \rangle = \langle \delta\psi | H | \psi \rangle = 0 \quad (1.4)$$

Utilizzando i moltiplicatori di Lagrange, ϵ_i , i quali garantiscono la giusta normalizzazione, si ottengono delle equazioni di Schrödinger per ogni particella i

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta^2 \phi_i(\mathbf{r}) + \int d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i \phi_i(\mathbf{r}) \quad (1.5)$$

in cui compare il potenziale $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, chiamato *potenziale autoconsistente*:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sum_{j=1}^A \int d^3\mathbf{r}'' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \phi_j(\mathbf{r}'') \phi_i^*(\mathbf{r}'') - \sum_{j=1}^A V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_j(\mathbf{r}') \phi_i^*(\mathbf{r}') \quad (1.6)$$

Utilizzando la funzione d'onda ψ dell'equazione (1.3) all'interno dell'equazione

¹In realtà, si può dimostrare che l'energia non dipende direttamente dalla funzione d'onda, bensì dalla densità del sistema [4], per cui il risultato precedentemente ottenuto può essere ricavato considerando piccole variazioni di ρ ($\delta\rho$) da cui dipende il funzionale $E[\rho]$.

(1.6) si determina il campo medio effettivo, il quale, a sua volta, determina una nuova funzione d'onda. Il processo deve essere iterato sino a che la funzione d'onda rimane la stessa ad ogni nuovo passaggio. Per questo motivo, il metodo viene chiamato *autoconsistente*.

Solitamente, nelle interazioni compaiono dei parametri liberi, i quali devono essere fissati in modo che il risultato riproduca certe osservabili note, come il raggio o l'energia totale.

In sostanza, il modello di HF trasforma un sistema formato da un gran numero di particelle interagenti tra loro in un sistema in cui le particelle sono indipendenti, immerse in un potenziale medio efficace.

È noto che questo modello riproduce in modo efficace molte proprietà dello stato fondamentale di nuclei medi e pesanti [3]. Essendo, però, un modello statico, non permette di descriverne le proprietà dinamiche osservate negli esperimenti spettroscopici. Esistono, infatti, numerosi stati eccitati di natura rotazionale e vibrazionale, di cui può essere un esempio la risonanza gigante, ovvero oscillazioni ad alta frequenza e piccola ampiezza di forma e densità attorno alla forma e densità di equilibrio.

Per una trattazione più completa è dunque necessario ricorrere ad altri metodi che vanno al di là della trattazione di HF.

1.2 Randon-Phase Approximation (RPA) e metodo di Hartree-Fock dipendente dal tempo

Alcuni dei fenomeni osservati sperimentalmente rivelano l'esistenza di stati vibrazionali a bassa energia di eccitazione. Queste eccitazioni (*fononi*) sono chiamate *modi collettivi* e possono essere descritte tramite un'approssimazione chiamata RPA (*Random Phase Approximation*).

Per comprendere meglio questo tipo di approssimazione, è utile descrivere un tipo di formalismo che verrà poi utilizzato, ovvero il formalismo di *buco-particella*.

1.2.1 Formalismo buco-particella

In un sistema di Fermi allo stato fondamentale, le particelle hanno tutte energia inferiore all'*energia di Fermi*

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{g_s} \rho \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.7)$$

Essa dipende dalle caratteristiche del sistema tramite la densità di particelle ρ e la degenerazione degli stati di singola particella g_s .

L'energia di Fermi è associata ad un momento k_F , chiamato *momento di Fermi*:

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (1.8)$$

Il *formalismo buco-particella* prevede che lo stato fondamentale del sistema venga rappresentato come uno stato di vuoto. Se una particella raggiunge uno stato eccitato (e quindi supera il livello di Fermi), lascia, al di sotto dell'energia di Fermi, un *buco*, con energia negativa. Se il momento della particella è $|\mathbf{l}+\mathbf{q}| > k_F$, in cui $\mathbf{q}$ è il momento trasferitole per permetterle di raggiungere lo stato eccitato, il momento di buco avrà valore $l < k_F$.

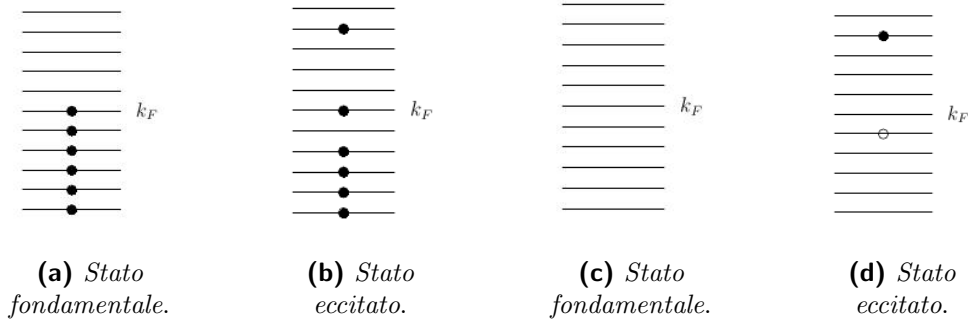


Figura 1.1: Sistema di Fermi non interagente: rappresentazione normale (figure a e b) e rappresentazione buco-particella (figure c e d)

In questo modo, è possibile descrivere gli stati eccitati come sistemi di buco-particella.

1.2.2 Random-Phase Approximation

La RPA è un tipo di approssimazione che permette di descrivere stati eccitati di piccola ampiezza tramite la sovrapposizione di stati di buco-particella. Può essere utilizzata per estendere modelli di campo medio statico, come il modello di HF prima descritto, a modelli di campo medio dinamici. La RPA è un tipo di approssimazione basata sull'accoppiamento buco-particella.

Se si considera un sistema nel suo stato fondamentale, una particella soggetta ad un potenziale esterno passa da uno stato con momento inferiore a quello di Fermi (k_F) ad uno stato eccitato con momento superiore; nel formalismo buco-particella, questo corrisponde alla creazione di una particella al di sopra di k_F e di un buco al di sotto. Ogni eccitazione, dunque, può essere descritta come la

creazione di una coppia buco-particella.

Nel regime di piccola perturbazione, il nucleo nello stato eccitato ha delle oscillazioni di piccola ampiezza attorno allo stato fondamentale, le quali possono essere viste come combinazione di stati eccitati di buco-particella. Il contributo energetico della perturbazione può essere descritto tramite un potenziale che descrive l'accoppiamento buco-particella V_{p-h} , in cui con la notazione $p-h$ si intende il termine *particle-hole*.

$$H = H_0 + V_{p-h} \quad (1.9)$$

L'equazione (1.9) corrisponde all'hamiltoniana perturbata, in cui H_0 rappresenta l'hamiltoniana dello stato fondamentale calcolata tramite HF.

Lo stato totale del sistema può essere rappresentato come una combinazione lineare di autostati delle coppie di buco-particella

$$|n\rangle = \sum_{ph} \chi_{ph} |ph^{-1}\rangle \quad (1.10)$$

in cui n rappresenta il numero di coppie buco-particella e χ_{ph} sono delle ampiezze degli stati di buco-particella.

Gli stati $|ph^{-1}\rangle$ possono essere descritti in termini degli operatori di creazione e distruzione

$$|ph^{-1}\rangle = a_p^\dagger a_h |0\rangle \quad (1.11)$$

in cui $a_p^\dagger$ crea una particella al di sopra dello stato di Fermi e a_h crea un buco al di sotto. Lo stato $|0\rangle$ corrisponde allo stato fondamentale del sistema calcolato tramite HF.

In questo modo, si ottiene:

$$|n\rangle = \sum_{ph} \chi_{ph} a_p^\dagger a_h |0\rangle = \Gamma_n^\dagger |0\rangle \quad (1.12)$$

in cui $\Gamma_n^\dagger = \sum_{ph} \chi_{ph} a_p^\dagger a_h$ è l'operatore che crea una particolare combinazione di n stati di buco-particella.

Si può dimostrare che $\Gamma_n^\dagger$ rispetta le seguenti regole di commutazione [4]

$$[\Gamma_n, \Gamma_n^\dagger] = 1 \quad (1.13a)$$

$$[H, \Gamma_n^\dagger] = \hbar\omega_n \Gamma_n^\dagger \quad (1.13b)$$

L'equazione (1.13a) ci dice che l'operatore rispetta le regole di commutazione dei bosoni. Questo indica che il risultato sarebbe del tutto analogo nel caso in cui al posto di Γ_n e $\Gamma_n^\dagger$ si usassero degli operatori di creazione e distruzione di bosoni. L'equazione (1.13b), invece, rappresenta l'equazione del moto dei sistemi di buco-particella. Grazie a questa è possibile dedurre che il loro moto può essere associato a quello di un oscillatore armonico [6].

Si giunge allo stesso risultato utilizzando direttamente l'approssimazione di HF descritta nel paragrafo 1.1.1, considerando funzioni d'onda dipendenti dal tempo [4]. Questo metodo è chiamato *Time Dependent Hartree-Fock* (TDHF).

1.3 Modelli oltre il campo medio

Come accennato nel paragrafo 1.1.1, l'utilizzo di un campo medio effettivo trascura parte della dinamica del sistema; rimanendo in un regime di approssimazione di HF non è, dunque, possibile descrivere alcune proprietà. Tramite gli esperimenti spettroscopici si osservano fenomeni dovuti ad accoppiamenti di stati eccitati collettivi e di singola particella che richiedono una descrizione che vada al di là dell'approssimazione di campo medio. A questo scopo, esistono modelli che prevedono di estendere i metodi di campo medio includendo ordini perturbativi dell'energia totale e di singola particella superiori al primo. Queste *correzioni* fanno sì che si possa recuperare parte della dinamica trascurata.

Nel caso in cui il potenziale abbia un range finito, si ottengono, come in approssimazione di campo medio, delle espressioni con dei parametri liberi, i quali devono essere fissati per poter riprodurre osservabili note. Il problema sorge quando si considerano potenziali a range zero; in tal caso, il secondo ordine di correzione dell'energia presenta una divergenza, chiamata *divergenza ultravioletta*.

La rinormalizzazione di questa divergenza è tutt'ora argomento di discussione; esiste comunque un metodo, che prevede l'inclusione di un *cut-off*, il quale permette di regolarla.

1.3.1 Forza di Skyrme e cut-off ultravioletto

Un tipo di potenziale di contatto molto utilizzato in fisica nucleare è denominato forza di Skyrme, rappresentato dall'equazione (1.14).

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = t_0(1 + x_0 P^\sigma) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{1}{2} t_1 \left[\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k}^2 + (\mathbf{k}^\dagger)^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \quad (1.14)$$

$$+ t_2 \mathbf{k}^\dagger \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k} + i W_0 (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) \mathbf{k}^\dagger \times \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k},$$

in cui $\mathbf{k}$ è il momento relativo tra le due particelle interagenti e le costanti t_0 , t_1 , t_2 , x_0 e W_0 devono essere riaggiustate utilizzando i dati sperimentali.

In questo elaborato verrà utilizzata una forma semplificata dell'equazione (1.14):

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.15)$$

in cui g è una costante.

L'utilizzo di un potenziale simile in un regime di oltre campo medio genera una divergenza nel calcolo del secondo ordine perturbativo dell'energia totale. Per capire l'origine di tale divergenza, riportiamo un esempio, il quale verrà approfondito nei capitoli successivi.

Se si considera una nucleone in un sistema a densità uniforme, approssimando le interazioni tramite forze di Skyrme semplificate, come quella riportata nell'equazione (1.15), la correzione del secondo ordine perturbativo dell'energia totale avrà la seguente forma:

$$\Delta E = -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2 m}{\hbar^2} \int_{\substack{l < k_F \\ |k-q|, |l+q| > k_F}} d^3q \, d^3l \, \frac{1}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + \mathbf{l} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \quad (1.16)$$

in cui $\mathbf{q}$ rappresenta il momento trasferito (per maggiori dettagli si vedano i capitoli 2 e 3).

Per grandi $\mathbf{q}$, l'integrale può essere approssimato nel seguente modo:

$$\Delta E \propto C \int_0^\infty dq q^2 \frac{1}{q^2} = C q|_0^\infty \quad (1.17)$$

in cui $C = -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2 m}{\hbar^2}$.

L'equazione (1.17) presenta una divergenza lineare in q . Questa divergenza è dovuta, essenzialmente, al fatto che il momento trasferito può arrivare ad infinito; in questo modo, vengono coinvolte energie che vanno oltre la scala delle tipiche energie nucleari, le quali fanno parte di fenomeni all'interno dei nucleoni stessi che sono qui trascurati. È, dunque, necessario limitare il valore dell'integrale ponendo un cutoff λ sul modulo dei momenti trasferiti. Il valore di questo cut-off può essere ricavato a posteriori in modo che il risultato finale riproduca quantità note.

Capitolo 2

Applicazione a sistemi nucleari infiniti

Per la descrizione di un sistema a molti corpi, assumono un ruolo fondamentale certe funzioni, chiamate *funzioni di Green* o *propagatori* [5]. Esse rappresentano l'ampiezza di probabilità che una particella si trovi in un certo stato 1 ad un tempo t e propaghi in uno stato 2 ad un tempo successivo, oppure si trovi in una data posizione $\mathbf{r}_1$ ad un tempo t e propaghi nella posizione $\mathbf{r}_2$ ad un tempo successivo.

La loro importanza deriva dal fatto che essi permettono di descrivere grandezze fondamentali di un sistema fisico complesso. Inoltre il loro significato è facilmente interpretabile e possono essere calcolati tramite metodi sistematici ed automatici. I propagatori possono essere definiti per sistemi relativistici e non relativistici, ma poiché in questo elaborato verrà trattato un sistema non relativistico, ci interesseremo solo di questi ultimi.

Il calcolo dei propagatori può essere fatto risolvendo le equazioni differenziali ad essi legate oppure espandendoli in una serie e calcolando questa con metodi approssimativi. Questo ultimo metodo può essere applicato tramite i *diagrammi di Feynman*.

I diagrammi di Feynman costituiscono un potente strumento che permette di rappresentare graficamente ogni interazione in un sistema a molti corpi. I propagatori possono essere calcolati traducendo direttamente in formule questi diagrammi seguendo alcune regole, chiamate *regole di Feynman*.

2.1 Diagrammi di Feynman

2.1.1 Particelle e quasi particelle

In un sistema a molti corpi, ogni particella è soggetta a numerose interazioni; le particelle con le quali interagisce formano un sorta di "nube" attorno ad essa. Ogni misura sperimentale fatta sulle osservabili della particella è influenzata dai potenziali a cui è soggetta. Si osserva, dunque, un sistema formato dalla particella in questione più le interazioni con le altre particelle, chiamato *quasi-particella*.

Quasi-particella = particella + interazioni con le particelle circostanti

La quasi-particella è libera di muoversi all'interno del sistema ed è soggetta ad interazioni con le altre quasi-particelle. Essa possiede una *quasi-energia* di quasi-particella indipendente definita nel seguente modo:

$$\epsilon_{quasi-particella}(\mathbf{k}') = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'^2}{2m^*} \quad (2.1)$$

in cui m^* (la massa della quasi-particella) rappresenta la massa della particella influenzata dal potenziale di interazione con tutte le altre. Quando viene fatta una misura sulla massa della particella, non si ricava la sua massa vera e propria, bensì la massa efficace.

La differenza tra l'energia di quasi-particella e quella di particella è chiamata *autoenergia* ed è indicata con Σ ; rappresenta il contributo energetico all'energia di particella indipendente dovuto alle interazioni.

$$\Sigma(E) = \epsilon_{quasi-particella} - \epsilon_{particella} \quad (2.2)$$

Il calcolo dell'energia di quasi-particella permette di ottenere un'espressione della massa efficace, confrontabile coi dati sperimentali.

2.1.2 Rappresentazione grafica per particelle classiche

Si consideri una particella classica inizialmente indipendente, la quale viene aggiunta, ad un tempo $t = t_1$, ad un sistema di particelle, anch'esse classiche, nel suo stato fondamentale; essa si trova inizialmente in uno stato iniziale 1. A seguito di interazioni con le altre particelle, si troverà, a tempo $t = t_2$, in uno stato

2.

La particella ha, dunque, una certa probabilità di propagare da uno stato 1 ad uno stato 2 nel tempo $t_2 - t_1$. Questa probabilità è descritta dalla somma delle probabilità di ogni interazione possibile nel periodo di tempo considerato.

Ognuna delle interazioni può essere rappresentata mediante un diagramma di Feynman, come appare in figura 2.1.

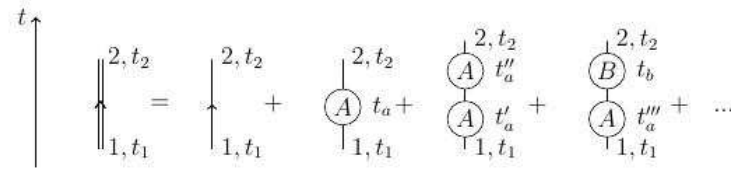


Figura 2.1: Rappresentazione nel caso classico dei diagrammi di Feynman

Nella tabella 2.1 sono indicati i vari simboli che appaiono nella figura 2.1 con il relativo significato.

Le interazioni vengono rappresentate in ordine temporale; nella figura, t rappresenta la direzione del tempo.

Figura	Significato
	Probabilità che la quasi-particella (particella + interazioni) propaghi dallo stato 1 allo stato 2 nel tempo $t_2 - t_1$
	Probabilità che la particella (indipendente dalle interazioni) propaghi dallo stato a allo stato b nel tempo $t_b - t_a$
	Probabilità dell'interazione A

Tabella 2.1: Interpretazione dei simboli che appaiono nei diagrammi di Feynman nel caso classico

Dunque, la probabilità che una quasi-particella passi dallo stato 1 allo stato 2 nel tempo $t_2 - t_1$, può essere scritta come:

$$P(1, 2; t_2 - t_1)_{t_2 - t_1 > 0} = P_0(1, 2; t_2 - t_1) + P_0(1, A; t_a - t_1)P(A, t_a)P_0(A, 2; t_2 - t_a) +$$

$$\begin{aligned}
& + P_0(1, B; t_b - t_1)P(B, t_b)P_0(B, 2; t_2 - t_b) + \dots + \\
& + P_0(1, A; t_a - t_1)P(A, t_a)P_0(A, B; t_b - t_a)P(B, t_b)P_0(B, 2; t_2 - t_b) + \dots
\end{aligned}$$

P_0 corrisponde alla probabilità di propagazione della particella indipendente, invece $P(A)$ corrisponde alla probabilità che ad un tempo t_a la particella abbia un'interazione A .

Poiché ogni interazione A può avvenire in qualunque tempo $t_1 \leq t_a \leq t_2$, è necessario sommare su ogni $t_a, t_b \dots$. Ne risulta che la probabilità che una particella propaghi da uno stato 1 ad uno stato 2 nel tempo $t_2 - t_1$ è data dalla somma su tutti i tempi e gli stati intermedi. Dal momento in cui l'intervallo $t_2 - t_1$ è continuo, la somma sui tempi diventa un integrale.

$$\begin{aligned}
& P(1, 2; t_2 - t_1)_{t_2 - t_1 > 0} = P_0(1, 2; t_2 - t_1) + \\
& + \sum_A \int dt_a P_0(1, A; t_a - t_1)P(A)P_0(A, 2; t_2 - t_a) + \\
& + \sum_A \sum_B \int dt_a \int dt_b P_0(1, A; t_a - t_1)P(A)P_0(A, B; t_b - t_a)P(B)P_0(B, 2; t_2 - t_b) + \dots
\end{aligned}$$

2.1.3 Sistemi quantistici e propagatori

Nel caso quantistico, le interazioni sono mediate da bosoni, i quali vengono rappresentati nei diagrammi di Feynman tramite una linea ondulata o tratteggiata. In figura 2.2 è riportato un esempio di interazione mediata da una forza debole (bosone Z_0).

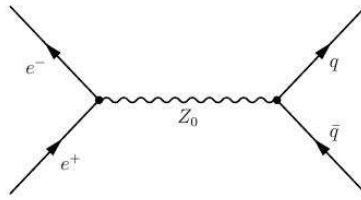


Figura 2.2: Interazione $e^+ + \bar{q} \rightarrow e^- + q$

Le probabilità di propagazione della particella da uno stato all'altro sono sostituite dai *propagatori* G .

La differenza tra propagatore e probabilità sta nel fatto che i propagatori descrivono l'*ampiezza* di probabilità. La probabilità quantistica è data dal prodotto del propagatore e del suo complesso coniugato, il che fa comparire nella sua espressione anche dei termini di interferenza.

$$P(1, 2)_{quantistica} = G^*G = |G_0(1, 2)|^2 + \underbrace{G_0^*(1, 2)G(I) + \dots}_{\text{Termini di interferenza}}$$

in cui I rappresenta la propagazione dallo stato 1 allo stato 2 tramite un'interazione.

Poichè si vogliono rappresentare le interazioni tramite il formalismo buco-particella, è necessario poter rappresentare il *buco* tramite i diagrammi di Feynman. Come descritto nel paragrafo 1.2.1, esso rappresenta un vuoto lasciato dalla particella una volta che ha cambiato il suo stato. Ha, dunque, energia negativa e viene rappresentato tramite una freccia con verso opposto rispetto alla direzione temporale (figura 2.3). Il motivo di questa convenzione verrà compreso meglio fra poco.

Interazioni tra particelle in sistemi infiniti nello stato fondamentale

I diagrammi di Feynman permettono di descrivere le interazioni tra particelle all'interno di sistemi nel loro stato fondamentale tramite il concetto di *vuoto* del formalismo buco-particella.

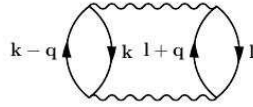


Figura 2.3: Contributo del secondo ordine (due interazioni) in un sistema allo stato fondamentale descritto tramite il formalismo buco-particella

Innanzitutto, bisogna distinguere il caso in cui si consideri un sistema infinito ed uno finito. Quest'ultimo presenta effetti di bordo che non possono essere trascurati e complicano notevolmente il problema; per tale motivo, in questo elaborato verranno considerati sistemi infiniti.

Un buon numero quantico utile a descrivere le proprietà di questi sistemi è il momento angolare delle particelle. Un aspetto importante che deve emergere nei diagrammi di Feynman è la conservazione del momento totale; un sistema allo stato fondamentale, se rappresentato tramite il formalismo buco-particella, ha inizialmente momento nullo. Anche durante l'interazione, deve dunque rimanere nullo.

Nella figura 2.3, infatti, si ha

$$\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{q} - \mathbf{l} = 0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} |\mathbf{k} - \mathbf{q}|, |\mathbf{l} + \mathbf{q}| > k_F & (\text{Stato di particella}) \\ k, l < k_F & (\text{Stato di buco}) \end{cases}$$

È da osservare che il diagramma rappresentato in figura 2.3 non rappresenta un vero e proprio stato fisico, ma *quasi-fisico*, poiché l'energia non si conserva; infatti, l'energia di una particella in termini del momento $\mathbf{k}$ è data da

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Sommando i termini energetici delle particelle in figura 2.3, si ottiene

$$\frac{\hbar^2(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}{2m} + \frac{\hbar^2(\mathbf{l} + \mathbf{q})^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 l^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{m}(q^2 + \mathbf{l} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) \neq 0$$

In realtà, questi diagrammi sono soltanto un metodo matematico che permette di rappresentare ogni contributo dello sviluppo perturbativo dell'energia della particella, ovvero quantità non osservabili. Non devono, dunque, possedere singolarmente un significato fisico osservabile, ma dipendono soltanto da come è stato fatto lo sviluppo. La somma di tutti i diagrammi, invece, rappresenta una quantità fisica osservabile.

Le interazioni in un sistema allo stato fondamentale sono molteplici e rappresentate tramite diagrammi la cui somma è solitamente difficile da calcolare (figura 2.4). A questo proposito, grazie al *teorema dell'ampiezza di vuoto* [5] la situa-

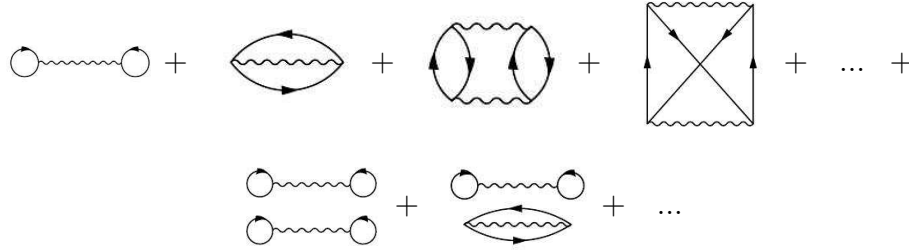


Figura 2.4: Diagrammi di Feynman della serie perturbativa di vuoto

zione risulta molto più semplice; infatti, esso dimostra che l'energia totale dello stato fondamentale può essere descritta dalla somma dell'energia delle particelle libere e dei contributi delle interazioni, i quali possono essere rappresentati tramite la somma di diagrammi *non scomponibili* (equazione (2.3)).

$$E_0 = W_0 + \text{tadpole} + \text{self-energy} + \text{bubble} + \text{box} + \dots +$$

$$(\text{---}\circ\text{---})^2 + \dots \quad (2.3)$$

Questo argomento non verrà qui approfondito, poiché non serve allo scopo di questo elaborato. Ciò che invece verrà meglio descritto è il comportamento di una particella con momento $\mathbf{k}$ che viene *aggiunta* all'interno di un sistema allo stato fondamentale.

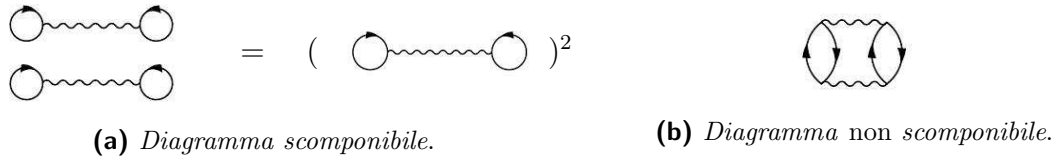


Figura 2.5: Diagrammi scomponibili e non.

Propagatore di particella singola

I diagrammi di Feynman sono utili anche per descrivere il comportamento di una particella, inizialmente indipendente, con un momento iniziale $\mathbf{k}$ che viene aggiunta all'interno di un sistema di particelle nel suo stato fondamentale. Essa è rappresentata dalla somma dei diagrammi dei contributi di ogni interazione della particella con le altre particelle (equazione (2.4)), come nel caso della particella classica.

La prima riga mostra una doppia linea verticale con una freccia verso l'alto, uguale a una singola linea verticale con una freccia verso l'alto, più un diagramma con una linea verticale che si divide in due per un cerchio, più un diagramma con una linea verticale che si divide in due per un cerchio con una freccia interna, più un diagramma con una linea verticale che si divide in due per un cerchio con due frecce interne, più ...

La seconda riga mostra un diagramma con una linea verticale che si divide in due per due cerchi, più ...

(2.4)

A differenza del sistema isolato allo stato fondamentale, in cui la propagazione di una particella è sempre abbinata alla propagazione di un buco per poter mantenere il momento totale nullo, in questo caso ogni diagramma è accomunato da una particella entrante di momento $\mathbf{k}$. Il momento totale del sistema deve, comunque, conservarsi; ad ogni interazione della particella con le altre si crea una coppia buco-particella che contribuisce a mantenere il momento totale iniziale.

Qualunque diagramma non rispetti questa regola non deve essere considerato. Le traiettorie delle particelle vengono descritte da un propagatore rappresentato tramite una funzione G , la quale può essere definita sia nella base delle coordinate che dei momenti.

$$iG(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_2 - t_1)_{t_2-t_1>0} = iG^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_2 - t_1) \Rightarrow \text{Ampiezza di probabilità che una particella si trovi in } \mathbf{r}_1 \text{ a tempo } t_1 \text{ nel sistema allo stato fondamentale ed in } \mathbf{r}_2 \text{ a tempo } t_2, \text{ sempre lasciando il sistema allo stato fondamentale.}$$

Per passare nella base dei momenti, basta utilizzare la trasformata di Fourier.

$$iG(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t_2 - t_1)_{t_2-t_1>0} = iG^+(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t_2 - t_1) \Rightarrow \text{Ampiezza di probabilità che venga aggiunta una particella nello stato } \phi_{k_1} \text{ a tempo } t_1 \text{ e propaghi allo stato } \phi_{k_2} \text{ a tempo } t_2 \text{ mantenendo il sistema allo stato fondamentale.}$$

La definizione più utilizzata nel caso di sistemi infiniti è quella nella base dei momenti, poiché permette di descrivere le proprietà del sistema in funzione dei momenti delle particelle.

G^+ è definito per $t_2 - t_1 > 0$; per altri tempi si ha che $G^+ = 0$, in modo da rispettare la causalità. Esso rappresenta l'ampiezza di probabilità di propagazione di una quasi-particella in un sistema nello stato fondamentale e può essere rappresentato come la somma delle ampiezze di probabilità di tutte le interazioni possibili.

$$G^+(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t_2 - t_1) = G_0^+(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t_2 - t_1) + \int d^3\mathbf{m} \int dt_m G_0^+(\mathbf{m}_1, \mathbf{k}_2; t_2 - t_m) V_m G_0^+(\mathbf{k}_1, \mathbf{m}; t_m - t_1) + \dots \quad (2.5)$$

in cui V_m è il potenziale dell'interazione che manda la particella ad un momento

$\mathbf{m}$ e G_0^+ rappresenta il propagatore di particella libera.

Quest'ultimo può essere ricavato grazie all'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo, dalla quale si ottiene l'evoluzione temporale della funzione d'onda. A tempo $t = t_1$ si ha:

$$\psi(\mathbf{r}, t_1) = \phi_{k_1}(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

A tempo $t = t_2$, lo stato evolve secondo l'operatore di evoluzione temporale di particella libera:

$$\psi(\mathbf{r}, t_2) = \phi_{k_1}(\mathbf{r}) e^{-i\epsilon_{k_1}(t_2-t_1)} \quad (2.7)$$

Perciò, l'ampiezza di probabilità che la particella si trovi in ϕ_{k_2} al tempo t_2 partendo da uno stato ϕ_{k_1} al tempo t_1 (con $t_1 < t_2$) è data da

$$\int d^3\mathbf{r} \psi(\mathbf{r}, t_2) \phi_{k_2}^*(\mathbf{r}) = e^{-i\epsilon_{k_1}(t_2-t_1)} \underbrace{\int d^3\mathbf{r} \phi_{k_1}(\mathbf{r}) \phi_{k_2}^*(\mathbf{r})}_{\delta_{k_1, k_2}} \quad (2.8)$$

Dalla definizione di propagatore si ottiene:

$$G_0^+(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t_2 - t_1) = -i\theta_{t_2-t_1} e^{-i\epsilon_{k_1}(t_2-t_1)} \delta_{k_1, k_2} = G_0^+(\mathbf{k}; t_2 - t_1) \quad (2.9)$$

Dunque, l'ampiezza di probabilità che una particella propaghi liberamente è data da

$$G_0^+(\mathbf{k}; t_2 - t_1) = \begin{cases} -i\theta_{t_2-t_1} e^{-i\epsilon_k(t_2-t_1)} & \text{per } t_2 \neq t_1 \\ 0 & \text{per } t_2 = t_1 \end{cases} \quad (2.10)$$

Il propagatore può essere definito anche per tempi in cui $t_2 - t_1 < 0$

Nella base delle posizioni:

$$iG(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_2 - t_1)_{t_2-t_1 < 0} = iG^-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_2 - t_1) \quad (2.11)$$

Oppure, nella base dei momenti:

$$iG(\mathbf{k}; t_2 - t_1)_{t_2-t_1 < 0} = iG^-(\mathbf{k}; t_2 - t_1) \quad (2.12)$$

Esso rappresenta il propagatore per uno stato di buco. Infatti, se si calcola il propagatore per una particella libera con $t_2 < t_1$, si ottiene:

$$G_0^-(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t_2 - t_1) = -i\theta_{t_1-t_2} e^{-i\epsilon_{k_1}(t_2-t_1)} \delta_{k_1, k_2} = G_0^-(\mathbf{k}; t_2 - t_1) \quad (2.13)$$

con $\epsilon_{k_1} > 0$.

Se si moltiplica sia ϵ_{k_1} che $t_2 - t_1$ per -1 , si ottiene:

$$-i\theta_{t_2-t_1} e^{-i(-\epsilon_{k_1})(t_2-t_1)} \delta_{k_1, k_2} = -i\theta_{t_2-t_1} e^{-i\epsilon'_{k_1}(t_2-t_1)} \delta_{k_1, k_2} = G_0^+(\mathbf{k}; t_2 - t_1)$$

con $\epsilon'_{k_1} < 0$, ovvero uno stato di buco.

Come nel caso in cui $t_2 < t_1$, il propagatore di *buco* indipendente è rappresentato da

$$G_0^-(\mathbf{k}; t_2 - t_1) = \begin{cases} -i\theta_{t_2-t_1} e^{i\epsilon_k(t_2-t_1)} & \text{per } t_2 \neq t_1 \\ 1 & \text{per } t_2 = t_1 \end{cases} \quad (2.14)$$

2.1.4 Regole di Feynman

Grazie alla teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo ed alla definizione di propagatore data nel paragrafo 2.1.3, si ottiene un dizionario con il quale tradurre i diagrammi di Feynman (tabella 2.2).

In generale, i sistemi a molti corpi possono essere facilmente rappresentati e descritti seguendo alcune regole:

1. Per ricavare l'*n*esimo ordine perturbativo, bisogna disegnare n linee ondulate (o tratteggiate) e due punti esterni.
2. A questo punto, collegare tutti i punti in tutti i modi possibili con linee rette, in modo da ottenere diagrammi non equivalenti (nel senso di Feynman).
3. Indicare ogni linea con un momento $\mathbf{k}$ in modo che la somma dei momenti entranti sia uguale a quelli uscenti, eliminando tutti i casi anomali o che non conservano il momento.
4. Valutare i grafici tramite il significato rappresentato in tabella.

Queste valgono per qualunque tipo di sistema e saranno utilizzate nel prossimo capitolo per il calcolo della perturbazione al secondo ordine perturbativo di una particella inizialmente indipendente interagente con un sistema a molti corpi.

2.2 Autoenergia di una particella in un sistema nucleare a densità uniforme

Quando si fanno misure su proprietà di una particella, è impossibile prescindere dalle interazioni a cui essa è soggetta; è, dunque, utile avere un'espressione delle quantità *effettive* confrontabili con i dati sperimentali. Una di queste è la massa efficace, di cui si è già parlato nel paragrafo 2.1.1. Come si vedrà in seguito, è possibile ottenere un'espressione della massa efficace in termini dell'autoenergia di particella calcolata ad un certo ordine perturbativo. L'espressione che si ottiene presenta dei parametri liberi, come, ad esempio, il parametro di cut-off del secondo ordine perturbativo dell'energia totale, i quali possono essere ricavati tramite un confronto coi dati sperimentali. Quando si fa una misura sulla massa di una particella, ciò che si ottiene è, in realtà, la massa efficace, la quale può essere confrontata con l'espressione teorica.

2.2.1 Massa efficace

Nel capitolo 3 si vuole calcolare la massa efficace di un nucleone in un sistema infinito; il momento iniziale $\mathbf{k}$ risulta, dunque, un buon numero quantico con il quale descrivere le proprietà del sistema.

Di seguito viene riportato una sorta di prospetto che descrive in modo semplice come calcolare la massa efficace di una particella in termini del momento iniziale utilizzando un'espressione dell'autoenergia.

L'energia E di un nucleone può essere scritta come

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \Sigma(k, E) \quad (2.15)$$

in cui Σ rappresenta l'autoenergia.

Da qui si ottiene

$$\frac{dE}{dk} = \frac{\hbar^2 k}{m} + \frac{d\Sigma}{dE} \frac{dE}{dk} + \frac{d\Sigma}{dk} \quad (2.16)$$

Perciò

$$\frac{dE}{dk}(1 - \frac{d\Sigma}{dE}) = \frac{\hbar^2 k}{m} + \frac{d\Sigma}{dk} \quad (2.17)$$

Come descritto nel paragrafo 2.1.1, si vuole rappresentare l'energia della particella come energia di particella indipendente utilizzando una massa efficace m^* , la quale tiene conto dei contributi delle interazioni.

L'energia E , dunque, può essere scritta come

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \rightarrow \frac{dE}{dk} = \frac{\hbar^2 k}{m^*} \quad (2.18)$$

Confrontandola con l'equazione (2.17), si ottiene un'espressione per la massa efficace in funzione di k , E ed m

$$\frac{\hbar^2 k}{m^*} = (1 - \frac{d\Sigma}{dE})^{-1} (\frac{\hbar^2 k}{m} + \frac{d\Sigma}{dk}) \quad (2.19)$$

2.2.2 Autoenergia

Nel paragrafo 2.1.1 è stato visto che l'autoenergia di una particella corrisponde al contributo energetico dovuto alle interazioni col sistema in cui è posta la particella. Essa può essere rappresentata graficamente tramite i diagrammi di Feynman utilizzando la definizione di propagatore.

Il propagatore della particella nuda è descritto nell'equazione (2.14). Grazie all'equazione (2.1), il propagatore di una quasi-particella con momento $\mathbf{k}$ può essere scritto come quello di particella indipendente con massa efficace m^* .

$$G^+(\mathbf{k}; t_2 - t_1) = \begin{cases} -i\theta_{t_2-t_1} e^{-i\epsilon_k^{(q-p)}(t_2-t_1)} & \text{per } t_2 \neq t_1 \\ 0 & \text{per } t_2 = t_1 \end{cases} \quad (2.20)$$

in cui $\epsilon_k^{(q-p)} = \epsilon_{quasi-particella}(\mathbf{k})$.

Utilizzando le equazioni (2.10) e (2.20), è evidente che l'autoenergia della particella può essere ottenuta dal prodotto dei propagatori di quasi-particella e di particella per $t_2 > t_1$

$$\frac{G^+}{G_0^+} = \frac{-ie^{-i\epsilon_k^{(q-p)}(t_2-t_1)}}{-ie^{-i\epsilon_k(t_2-t_1)}} = e^{-i[\epsilon_k^{(q-p)} - \epsilon_k](t_2-t_1)} = e^{-i\Sigma_k(t_2-t_1)}, \quad (2.21)$$

in cui l'ultimo passaggio è dato dalla definizione dell'autoenergia dell'equazione (2.27).

Per cui,

$$G^+ = G_0^+ e^{-i\Sigma_k(t_2-t_1)} \quad (2.22)$$

L'equazione (2.22) può essere confrontata con l'equazione (2.4), la quale rappresenta la serie dei contributi dello sviluppo perturbativo del propagatore G^+ di singola particella descritta tramite diagrammi di Feynman.

Un passaggio utile, che permette di semplificare il confronto, è quello di scrivere l'equazione (2.4) in una serie di diagrammi non scomponibili, come fatto nel paragrafo 2.1.3 per il sistema allo stato fondamentale, tramite i passaggi riportati nell'equazione (2.23).

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} = \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} + \left(\begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} \right)^2 + \left(\begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} \right)^3 + \dots + \\
 & \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} + \left(\begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} \right)^2 + \dots + \\
 & 2 \times \left(\begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} + \dots \right) + \quad (2.23) \\
 & 3 \times \left[\begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} \times \left(\begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} \right)^2 + \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} + \dots \right] + \dots \\
 & = \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} \times \left(\begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagramma} \\ \text{diagramma} \end{array} + \dots \right) \right]^n
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\left(\text{diagram 1} - \left(\text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \dots \right) \right)}$$

Il propagatore di singola particella può essere, dunque, scritto come

$$G^+ = \frac{1}{[G_0^+]^{-1} - \sum(\text{diagrammi non scomponibili})} \quad (2.24)$$

Per semplificare il passaggio successivo, è utile una rappresentazione nella base $(\mathbf{k}, \omega)$ anziché $(\mathbf{k}, t)$; l'equazione (2.22) può essere scritta nella prima base grazie alla trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned}\tilde{G}^+(\mathbf{k}, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d(t_2 - t_1) G_0^+ e^{-i\Sigma_k(t_2 - t_1)} e^{i\omega t} = \int_0^{+\infty} d(t_2 - t_1) (-i) e^{-i\epsilon_k(t_2 - t_1)} e^{-i\Sigma_k(t_2 - t_1)} e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{\omega - \epsilon_k - \Sigma_k + i\delta}\end{aligned}\quad (2.25)$$

Uguagliando l'equazione (2.24) con l'equazione (2.25), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega - \epsilon_k - \Sigma_k + i\delta} &= \frac{1}{[G_0^+(\mathbf{k}, \omega)]^{-1} - (\sum \text{diagrammi non scomponibili})} \\ &= \frac{1}{\omega - \epsilon_k + i\delta - (\sum \text{diagrammi non scomponibili})}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

in cui, nell'ultimo passaggio è stato utilizzato il dizionario della tabella 2.2.

Quest'ultima equazione permette di rappresentare l'autoenergia tramite una serie infinita di diagrammi di Feynman non scomponibili, in cui ognuno rappresenta un contributo ad un ordine perturbativo.

$$\Sigma_k = \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]} + \text{[diagram 3]} + \dots \quad (2.27)$$

Esistono approssimazioni che permettono di calcolare la serie considerando soltanto i termini che, in un dato sistema, danno il maggior contributo. Il modello di HF, ad esempio, può essere ottenuto prendendo in considerazione solo i diagrammi di primo ordine presenti nell'equazione (2.27).

$$\Sigma_{HF} = \text{diagramma a) + diagramma b)} \quad (2.28)$$

Un'altro tipo di approssimazione è la RPA, già descritta nel paragrafo 1.2.2. Nel prossimo paragrafo si discuterà di come rappresentare l'autoenergia di particella singola calcolata tramite RPA in serie di diagrammi di Feynman.

2.2.3 RPA per una nucleone in un sistema a densità uniforme

Come descritto nel capitolo 1, la RPA permette di ottenere un'approssimazione che riproduca le proprietà dei livelli vibrazionali a bassa energia nei sistemi a molti corpi.

Nei nuclei esistono diversi tipi di vibrazione. Alcuni sono oscillazioni di densità prevalentemente di superficie, altri di volume. In questo lavoro pensiamo alla RPA come una valida approssimazione per descrivere le oscillazioni di densità della materia uniforme.

Nel limite di campo medio, la RPA considera i contributi dinamici del primo ordine perturbativo. Tramite modelli oltre campo medio, invece, la descrizione può essere estesa a termini di ordine successivo. Ciò che si vuole ottenere con quest'ultimo metodo è una migliore descrizione di certi fenomeni spettroscopici dovuti all'accoppiamento di stati eccitati collettivi e di particella singola, non descritti dai modelli di campo medio.

Rappresentazione grafica

La teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo permette di calcolare l'ampiezza di probabilità che una particella in uno stato 1 al tempo t_1 si trovi nello stato 2 a tempo t_2 , rappresentata dal propagatore G (paragrafo 2.1.3).

In termini dell'operatore di evoluzione temporale $S(t_2, t_1)$, si ottiene

$$G^+(1, 2; t_2 - t_1) = \langle 2 | S(t_2, t_1) | 1 \rangle \quad (2.29)$$

In rappresentazione di interazione, l'azione dell'operatore temporale dipende dal potenziale di interazione V che, nel caso di RPA, è proprio l'interazione di buco-particella ($V = V_{p-h}$).

$$S(t_2, t_1) = \exp \left(\frac{1}{i\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt V_{p-h}(t) \right) \quad (2.30)$$

Per piccole perturbazioni, è possibile sviluppare in serie l'operatore di evoluzione temporale nell'equazione (2.29), ottenendo

$$G^+(2, 1; t_2 - t_1) = \langle 2 | I + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt V_{p-h}(t) + \frac{1}{2} \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_1}^{t_2} dt' dt'' V_{p-h}(t') v_{p-h}(t'') + \dots | 1 \rangle =$$

$$= \delta_{12} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt \langle 2 | S_0^{-1}(t, t_1) V_{p-h} S_0(t, t_1) | 1 \rangle \quad (2.31a)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{t_1}^{t'} dt'' \langle 2 | S_0^{-1}(t', t_1) V_{p-h} S_0(t', t_1) S_0^{-1}(t'', t_1) V_{p-h} S_0(t'', t_1) | 1 \rangle + \dots \quad (2.31b)$$

$$= G_0^+(1; t_2 - t_1) + G_{V_{p-h}}^+(2, 1; t_2 - t_1) + G_{V_{p-h}}^+(2, m; t_2 - t_m) G_{V_{p-h}}^+(m, 1; t_m - t_1) + \dots \quad (2.31c)$$

Il propagatore di particella indipendente G_0^+ può essere scritto come

$$G_0^+(2, 1; t_2 - t_1) = \langle 2 | S_0(t_2 - t_1) | 1 \rangle \quad (2.32)$$

in cui

$$S_0(t_2 - t_1) = \exp \left(\frac{1}{i\hbar} H_0(t_2 - t_1) \right) \quad (2.33)$$

H_0 rappresenta l'hamiltoniana di particella indipendente.

L'equazione (2.31) diventa

$$G(2, 1; t_2 - t_1) = G_0(2, 1; t_2 - t_1) + \int dm \int dt_m G_0(2, m; t_2 - t_m) V_{p-h} G_0(m, 1; t_m - t_1)$$

$$+ \int dn \int dl \int dt_n \int dt_l G_0(t_2 - t_n) V_{p-h} G_0(t_n - t_m) V_{p-h} G_0(t_m - t_1) + \dots$$

$$= G_0(2, 1; t_2 - t_1) + \int dm \int dt_m G_0(2, m; t_2 - t_m) V_{p-h} G(m, 1; t_m - t_1) \quad (2.34)$$

Ognuno dei termini della serie (2.31) rappresenta il contributo ad un ordine perturbativo. Il secondo termine della (2.31a), ad esempio, rappresenta il contributo al primo ordine perturbativo in cui compare una interazione buco-particella. Nel secondo ordine (equazione (2.31b)) compaiono due interazioni, ecc.

Per mezzo della tabella 2.2 è possibile rappresentare l'equazione (2.34) tramite

diagrammi di Feynman:

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} + \dots \quad (2.35)$$

La rappresentazione grafica del propagatore in approssimazione di RPA è composta da diagrammi in cui sono presenti degli "anelli" formati da coppie di buco-particella; per questo motivo, la RPA è anche chiamata approssimazione ad anelli (ring approximation).

Il risultato qui ottenuto può essere confrontato con quello del paragrafo 1.2.2. Infatti, il potenziale utilizzato per descrivere l'operatore di evoluzione temporale nell'equazione (2.33) è lo stesso di quello utilizzato nell'hamiltoniana (1.9). Dunque, anche in questo caso l'hamiltoniana del sistema può essere scritta come

$$H = H_0 + V_{p-h} \quad (2.36)$$

Tenendo conto di quanto detto nel paragrafo 2.2.2, l'autoenergia per un sistema che può essere descritto tramite RPA, in forma di diagrammi di Feynman risulta

$$\Sigma_k = \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} + \dots \quad (2.37)$$

Il secondo termine che compare nell'equazione (2.37) è esattamente quello che verrà calcolato nel prossimo capitolo.

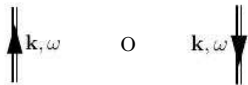
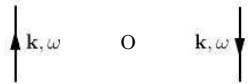
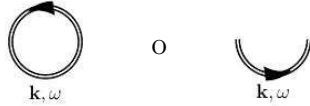
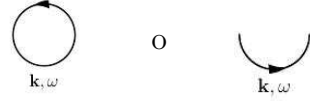
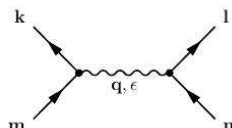
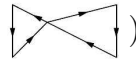
Elemento di diagramma	Traduzione
	$iG(\mathbf{k}, \omega)$
	$iG_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{\omega - \epsilon_k + i\delta_k}, \quad \begin{matrix} \delta_{k > k_F} = +\delta \\ \delta_{k > k_F} = -\delta \end{matrix}$
	$iG(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\omega 0^+)$ $(0^+ \times \infty = \infty)$
	$iG_0(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\omega 0^+)$ $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} iG_0(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\omega 0^+) \right. \\ \left. = -\theta_{k_F - k} \right]$
	$-iV_{klmn} \quad \text{oppure} \quad -iV_q$
Ogni loop di fermioni (es: )	(-1)
Ogni frequenza intermedia ω	$\int \frac{d\omega}{2\pi}$
Ogni momento intermedio $\mathbf{k}$	$\sum \mathbf{k} \quad \text{oppure} \quad \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (\text{per } \Omega = 1)$ (inclusa la somma sugli spin)

Tabella 2.2: Traduzione degli elementi che appaiono nei diagrammi di Feynman per un sistema di fermioni interagenti senza un potenziale esterno (metodo di Feynman [5])

Capitolo 3

Calcolo della correzione dell'autoenergia al secondo ordine perturbativo

Nei capitoli precedenti è stato visto, in linea generale, come approssimare le interazioni a cui una particella è soggetta quando si trova in un sistema a molti corpi. Queste approssimazioni fanno sì che nei risultati finali compaiano dei parametri liberi i cui valori devono essere fissati; è bene, dunque, ottenere delle espressioni di quantità osservabili confrontabili con i dati sperimentali.

Una quantità importante è l'energia di singola particella. Infatti l'energia dell'ultimo stato occupato (o del primo stato libero) è misurabile come differenza delle energie dei sistemi

$$E(N) - E(N - 1) \quad (\text{oppure } E(N + 1) - E(N)).$$

L'autoenergia è la differenza tra l'energia in una data approssimazione e la stessa calcolata all'ordine zero (particelle libere o descritte in approssimazione di HF). Inoltre, essa permette di calcolare osservabili come la massa efficace, già descritta nel paragrafo 2.2.1.

Nello studio dei sistemi nucleari, il contributo al più basso ordine perturbativo dell'autoenergia (secondo ordine) viene spesso calcolato utilizzando l'approssimazione di HF come ordine zero, ottenendo, in termini dei diagrammi di Feynman, l'espressione (2.28).

In questo e nel prossimo capitolo ci si propone di calcolare il contributo al secondo ordine perturbativo dell'autoenergia di un nucleone in un sistema uniforme, le cui interazioni sono descritte da un potenziale di Skyrme semplificato, come quello che compare nell'equazione (1.15).

Dall'equazione (2.37) si ottiene il contributo al secondo ordine perturbativo:

$$\Delta E = \text{diagramma} \quad (3.1)$$

Traducendo il diagramma tramite la tabella 2.2, si ottiene l'espressione (3.5).

$$\Delta E(\mathbf{k}, \omega) = -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2}{2} \int_{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|, |\mathbf{l}+\mathbf{q}| > k_F}^{l < k_F} d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{l} \frac{1}{\omega - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{l}+\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{l}} + i\delta} \quad (3.2)$$

A causa del contributo immaginario dato al denominatore da $i\delta$, l'equazione (3.2) può essere separata in una parte reale ed una immaginaria:

$$\Delta E(k, \omega) = R(k, \omega) + iI(k, \omega) \quad (3.3)$$

La parte immaginaria permette di calcolare il tempo di vita medio della particella e la parte reale corrisponde all'effettivo contributo dato dalle interazioni all'autoenergia [5]; quest'ultimo è, dunque, quello che interessa allo scopo di questo elaborato. Esso può essere calcolato tramite due differenti metodi.

Il primo metodo prevede l'utilizzo della cosiddetta *relazione di dispersione*: se $\Delta E(k, \omega)$ è data dall'equazione (3.2), allora si ha che [7]

$$R(k, \omega) = \frac{P}{\pi} \int_{\omega_F}^{\infty} \frac{I(k, \omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \quad (3.4)$$

L'equazione (3.4) permette di calcolare la parte reale partendo da quella immaginaria.

Il secondo metodo, quello qui utilizzato, consiste, invece, nel calcolare direttamente l'integrale che costituisce la parte reale dell'equazione (3.2), dato da

$$R(k, \omega) = -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2}{2} \int_{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|, |\mathbf{l}+\mathbf{q}| > k_F}^{l < k_F} d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{l} \frac{1}{\omega - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{l}+\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{l}}} \quad (3.5)$$

Il calcolo di questo integrale risulta alquanto lungo e difficile, per cui è stato necessario adottare un'approssimazione che lo semplificasse.

Prima di descrivere il tipo di approssimazione e di passare al calcolo dell'integrale, è necessario introdurre il concetto di particelle *on-shell* ed *off-shell*, di cui si parla nel prossimo paragrafo.

3.1 Particelle *on-shell* ed *off-shell*

Nel paragrafo 2.1.3, è stato visto che i diagrammi di Feynman, se presi singolarmente, non descrivono processi propriamente fisici, bensì processi in cui le particelle possono essere *virtuali*. La somma di tutti i diagrammi possibili descrive, invece, un'osservabile fisica. Infatti, un singolo diagramma può descrivere un processo fisico; nel caso, ad esempio, in cui l'energia della particella sia maggiore od uguale alla minore energia raggiungibile attraverso tutte le particelle in gioco durante l'interazione, il diagramma descrive un processo fisico. In ogni caso, la correzione all'autoenergia non sarà mai un'osservabile, invece la somma di tutti i diagrammi descrive un'osservabile fisica.

Se si considera una particella reale (fisica), bisogna tenere conto che essa deve rispettare la legge di dispersione che ne descrive il moto. Per una particella non relativistica (ovvero il caso trattato in questo elaborato), essa è data da

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \Sigma(k, E), \quad (3.6)$$

in cui $\Sigma(k, E)$ è l'autoenergia della particella.

Nel caso in cui si calcoli la correzione al secondo ordine perturbativo, grazie alle equazioni di Dyson [5], l'autoenergia Σ presente nell'equazione (3.6) corrisponde alla correzione dell'autoenergia all'ordine perturbativo più basso, per cui si ottiene

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(k, E), \quad (3.7)$$

in cui $\Sigma_1(k, E) = V(k, E)$, la quale può essere calcolata tramite il modello di HF. I punti dello spazio *energia-momento* fanno, dunque, parte dell'iperboloide descritto dall'equazione (3.7), la quale dipende dal valore della massa della particella; per questo motivo, la particella viene detta *on mass shell* (abbreviato, *on-shell*).

Quando si tratta, invece, di particelle virtuali, l'equazione (3.6) non è più soddisfatta; l'energia E ed il momento $\mathbf{k}$ risultano, dunque, tra loro indipendenti.

In questo caso, la particella viene detta *off-shell*.

L'integrale dell'equazione (3.5), in cui $\omega = E$, descrive la correzione dell'energia al secondo ordine di una particella virtuale, per cui si ha che

$$\omega \neq \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(k, \omega) \quad (3.8)$$

Le quantità $\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$, $\epsilon_{\mathbf{1}+\mathbf{q}}$ e $\epsilon_{\mathbf{1}}$ corrispondono all'energia delle particelle libere che

compaiono nel diagramma dell'equazione (3.1). L'integranda dell'equazione (3.5) può, dunque, essere scritta come (poiché si vuole calcolare la parte reale della correzione all'autoenergia, d'ora in poi, con la notazione $\Delta E(k, \omega)$ si intenderà $R(k, \omega)$ dell'equazione 3.3):

$$\begin{aligned} \Delta E(\mathbf{k}, \omega) = & -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2}{2} \int_{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|, |\mathbf{l}+\mathbf{q}| > k_F}^{l < k_F} d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{l} \frac{1}{\omega - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{l}+\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{l}}} = \\ & -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2 m}{\hbar^2} \int_{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|, |\mathbf{l}+\mathbf{q}| > k_F}^{l < k_F} d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{l} \frac{1}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + \mathbf{q} \cdot (\mathbf{l} - \mathbf{k})}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

in cui $\omega' = \frac{2m}{\hbar^2} \omega$.

Come si vedrà in seguito, il calcolo dell'integrale in tali condizioni risulta lungo e complicato. Per semplificare la situazione, la particella verrà approssimata al caso *on-shell* e considerata inizialmente libera, così da ottenere la seguente legge di dispersione semplificata:

$$\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (3.10)$$

In questo modo, l'equazione (3.9) diventa

$$\Delta E(k) = -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2 m}{\hbar^2} \int_{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|, |\mathbf{l}+\mathbf{q}| > k_F}^{l < k_F} d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{l} \frac{1}{q^2 + \mathbf{l} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}, \quad (3.11)$$

la quale risulta molto più semplice da calcolare.

Per completezza e per potere, in un futuro, riprendere i calcoli senza utilizzare l'approssimazione di particella on-shell, verrà, qui, riportata una parte del calcolo completo dell'integrale (3.5) con la relazione di dispersione esatta. Esso verrà approssimato tramite la (4.3) in un secondo momento.

3.2 Svolgimento dell'integrale

Il primo passo da fare per risolvere la quantità (3.5) è quello di definire il dominio di integrazione nel modo più semplice possibile. In questo elaborato, l'integrale verrà svolto partendo dalla variabile $\mathbf{l}$. Definiamo, dunque, la quantità $I(k, \omega)$ come

$$I(k, \omega) = -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2 m}{\hbar^2} \int_{|\mathbf{l}+\mathbf{q}| > k_F}^{l < k_F} d^3 \mathbf{l} \frac{1}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + \mathbf{q} \cdot (\mathbf{l} - \mathbf{k})} \quad (3.12)$$

Le condizioni poste sul dominio di integrazione fanno sì che, per diversi valori di $\mathbf{q}$, esistano domini di $\mathbf{l}$ differenti. In particolare, bisogna distinguere due casi: il caso in cui $q < 2k_F$ ed il caso in cui $q > 2k_F$. In appendice A sono riportati tutti i passaggi che portano ad una rappresentazione grafica del dominio di integrazione per entrambi i casi.

3.2.1 Svolgimento dell'integrale nella variabile $\mathbf{l}$

Come spiegato nel paragrafo precedente ed in appendice A, l'integrale (3.12) deve essere svolto in due parti. Esso può, quindi, essere scritto come

$$I(k, \omega) = I_1(k, \omega) + I_2(k, \omega)$$

in cui $I_1(k, \omega)$ ed $I_2(k, \omega)$ rappresentano, rispettivamente, l'integrale per $q < 2k_F$ e l'integrale per $q > 2k_F$.

Integrale per $q < 2k_F$

Partendo dalla condizione in cui $q < 2k_F$, si ottiene la seguente equazione

$$I_1(\mathbf{k}) = \int_{|\mathbf{l}+\mathbf{q}| > k_F}^{l < k_F, q < 2k_F} d^3 \mathbf{l} \frac{1}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + \mathbf{q} \cdot (\mathbf{l} - \mathbf{k})} \quad (3.13)$$

Il dominio di integrazione può essere graficamente rappresentato come in figura 3.1, dove $\mathbf{q}$ è fissato e diretto lungo l'asse z .

La soluzione completa del dominio dell'integrale è riportata in appendice A; invece, tutti i passaggi per il calcolo della soluzione dell'integrale vengono svolti in appendice B.

Per la condizione $q < k_F$, si ottiene il seguente risultato:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{k}, \omega) = \pi \left\{ \left[\frac{k_F^2}{q} - 2 \left(\frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right) - \frac{1}{q} \left(\frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right)^2 - q \right] \log \left(\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 + k_F q \right) \right. \\ \left. + \left[q + 2 \left(\frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right) \right] \log \left(\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \frac{q^2}{2} \right) + \left[\frac{1}{q} \left(\frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right)^2 - \frac{k_F^2}{q} \right] \log \left(\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + k_F q \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{q}{2} + k_F + \frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right\} \quad (3.14)$$

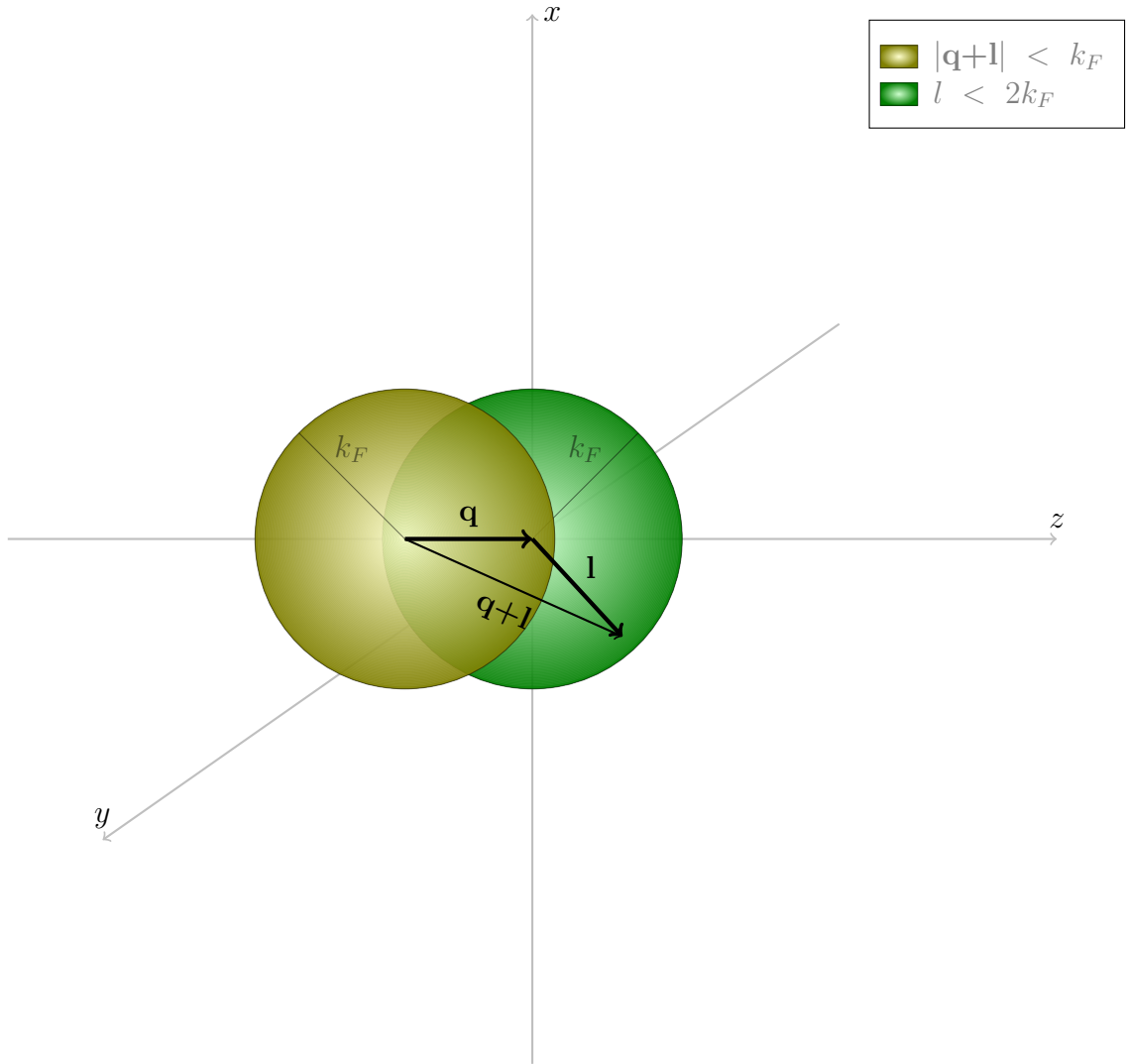


Figura 3.1: Dominio di integrazione della variabile $\mathbf{l}$ quando $q < k_F$

Integrale per $q > 2k_F$

La condizione che $\mathbf{q}$ sia maggiore di $2k_F$ prevede che le sfere rappresentate in figura 3.1 non si intersechino. Si ha, come conseguenza, un risultato differente rispetto a quello dell'equazione (3.14).

$$I_2(\mathbf{k}, \omega) = \int_{\substack{l < k_F, q > 2k_F \\ |\mathbf{l} + \mathbf{q}| > k_F}} d^3\mathbf{l} \frac{1}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + \mathbf{q} \cdot (\mathbf{l} - \mathbf{k})} \quad (3.15)$$

Il dominio di integrazione è rappresentato in figura 3.2.

Come per $q < 2k_F$, la soluzione completa del dominio è riportata in appendice A

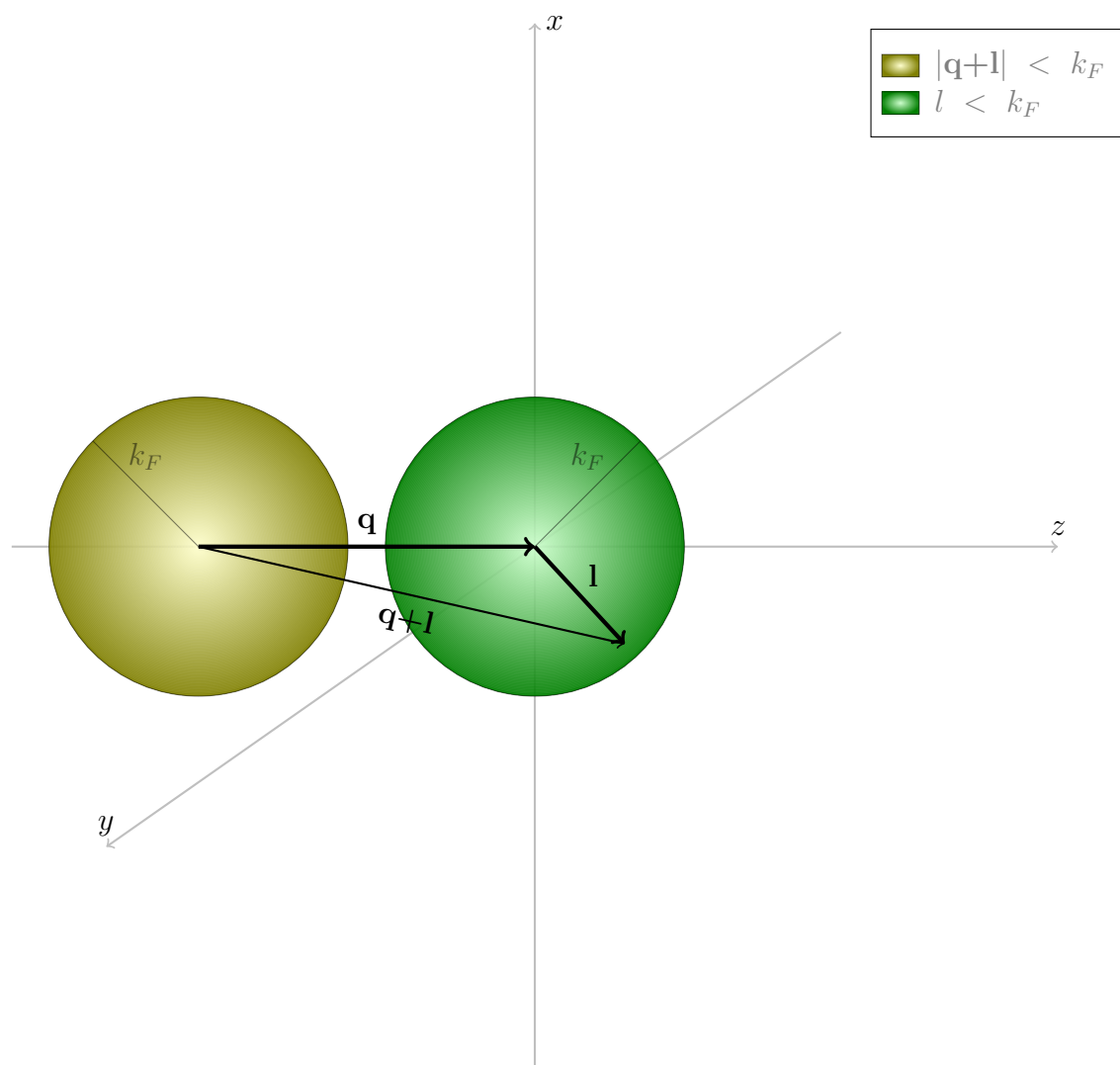


Figura 3.2: Dominio di integrazione della variabile $\mathbf{l}$ quando $q > 2k_F$

e lo sviluppo dell'integrale in appendice B.

In tale condizione, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 I_2(\mathbf{k}, \omega) = \pi \left\{ \left[\frac{k_F^2}{q} - 2 \left(\frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right) - \frac{1}{q} \left(\frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right)^2 - q \right] \log \left(\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 + k_F q \right) \right. \\
 + \left[\frac{1}{q} \left(\frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right)^2 + 2 \left(\frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right) + q - \frac{k_F^2}{q} \right] \log \left(\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 - k_F q - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} \right) \\
 \left. + 2k_F \frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q^2} \right\} \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

A questo punto, è possibile passare allo svolgimento dell'integrale nella variabile $\mathbf{q}$.

3.2.2 Svolgimento dell'integrale nella variabile $\mathbf{q}$

Tenendo conto delle costanti che appaiono nell'equazione (3.5) e della suddivisione fatta per il dominio di integrazione di $\mathbf{l}$, l'autoenergia, a questo punto, risulta

$$\Sigma(k, \omega) = -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2 m \pi}{\hbar^2} \left(\int_{\substack{q < 2k_F \\ |\mathbf{k} - \mathbf{q}| > k_F}} d^3 \mathbf{q} I_1(\mathbf{k}, \omega) + \int_{\substack{q > 2k_F \\ |\mathbf{k} - \mathbf{q}| > k_F}} d^3 \mathbf{q} I_2(\mathbf{k}, \omega) \right) \quad (3.17)$$

Il dominio d'integrazione per la variabile $\mathbf{q}$ è stato determinato in maniera algebrica e non geometrica, ottenendo quattro diverse condizioni. I passaggi completi sono riportati nelle pagine seguenti.

Soluzione matematica del dominio di integrazione della variabile $\mathbf{q}$

Per semplificare i calcoli, è stato fatto, innanzitutto, un cambio di variabili, utilizzando $\mathbf{q}' = -\mathbf{q}$ invece che $\mathbf{q}$. Per cui

$$|\mathbf{k} - \mathbf{q}| \implies |\mathbf{k} + \mathbf{q}'|$$

Tramite la condizione di integrazione su $\mathbf{k}$, si ha che

$$|\mathbf{k} + \mathbf{q}'| > k_F \implies \sqrt{k^2 + q'^2 + 2kq' \cos \theta} > k_F$$

Elevando al quadrato ambedue i membri, si ottiene:

$$k^2 + q'^2 + 2kq' \cos \theta > k_F^2 \implies \cos \theta > \frac{k_F^2 - k^2 - q'^2}{2kq'} \quad (3.18)$$

Questa condizione deve essere considerata nel caso in cui il secondo membro dell'equazione (3.18) sia maggiore di -1 ; in caso contrario, il coseno varia tra -1 e $+1$.

$$\frac{k_F^2 - k^2 - q'^2}{2kq'} > -1 \quad (3.19)$$

La disequazione (3.19) è verificata per

$$k - k_F < q' < k + k_F$$

Poichè l'integrale si suddivide in una parte in cui $q > 2k_F$ ed una in cui $q < 2k_F$, è necessario valutare se $2k_F$ debba essere maggiore o minore di $k - k_F$ e di $k + k_F$. Facendo il confronto si ottengono i seguenti risultati:

$$2k_F < k - k_F \implies k > 3k_F \quad (3.20a)$$

$$2k_F > k - k_F \implies k < 3k_F \quad (3.20b)$$

$$2k_F < k + k_F \implies k > k_F \quad (3.20c)$$

$$2k_F > k + k_F \implies k < k_F \quad (3.20d)$$

In generale, potremmo pensare di considerare valori arbitrari di k . Tuttavia i momenti vicini a k_F sono quelli che hanno un significato fisico più chiaro e sono accessibili sperimentalmente. Come già richiamato all'inizio di questo capitolo, se ad esempio consideriamo una particella subito sopra al livello di Fermi la sua energia corrisponde alla differenza tra le energie totali (misurabili) $E(N+1) - E(N)$. Una situazione analoga vale per un buco subito al di sotto del livello di Fermi. Tuttavia, ci siamo limitati nel seguito allo studio del caso $k > k_F$ e non troppo diverso. Per questo motivo, le condizioni (3.20a) e (3.20d) sono automaticamente escluse. Si ottiene, dunque

$$k - k_F < 2k_F < k + k_F \text{ per } k_F < k < 3k_F. \quad (3.21)$$

Soluzione dell'integrale

A questo punto, l'autoenergia può essere scritta tenendo conto delle condizioni poste su $\mathbf{q}'$ nell'integrale (3.17) e della condizione (3.21).

Osservando le equazioni (3.14) e (3.16), è evidente che molte parti degli integrali sono simili. Per facilitare la scrittura, possiamo chiamare

- $a_1(\mathbf{k}, \omega) = \left[\frac{k_F^2}{q} - 2\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}\right) - \frac{1}{q}\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}\right)^2 - q \right] \log\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 + k_F q\right)$
- $a_{-1}(\mathbf{k}, \omega) = \left[2\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}\right)^2 + q - \frac{k_F^2}{q} \right] \log\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 - k_F q\right)$
- $a_2(\mathbf{k}, \omega) = \left[q + 2\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}\right) \right] \log\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \frac{q^2}{2}\right)$
- $a_3(\mathbf{k}, \omega) = \left[\frac{1}{q}\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}\right)^2 - \frac{k_F^2}{q} \right] \log\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + k_F q\right)$
- $p_1(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{q}{2} + k_F + \frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q}$
- $p_2(\mathbf{k}, \omega) = 2k_F \frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q^2}$

Nelle equazioni precedenti, è stato utilizzato il cambio di variabili $\mathbf{q}' = -\mathbf{q}$, chiamando, nuovamente, la variabile $\mathbf{q}'$ come $\mathbf{q}$.

L'integrale in $\mathbf{q}$ dell'autoenergia può essere scritto come

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{k}, \omega; \lambda) = 2\pi & \left\{ \int_{k+k_F}^{\lambda} dq q^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta [a_1 + a_{-1} + p_2] \right. \\
 & + \int_{2k_F}^{k+k_F} dq q^2 \int_{\frac{k_F^2 - k^2 - q^2}{2kq}}^1 d\cos\theta [a_1 + a_{-1} + p_2] \\
 & + \int_{k-k_F}^{2k_F} dq q^2 \int_{\frac{k_F^2 - k^2 - q^2}{2kq}}^1 d\cos\theta [a_1 + a_2 + a_3 + p_1] \\
 & \left. + \int_0^{k-k_F} dq q^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta [a_1 + a_2 + a_3 + p_1] \right\} \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

È da notare che il primo integrale dell'equazione (3.22) presenta una divergenza lineare in $\mathbf{q}$ per $\mathbf{q}$ grandi. Come descritto nel paragrafo 1.3.1, infatti, il contributo al secondo ordine perturbativo presenta la cosiddetta *divergenza ultravioletta*. Per questo motivo è stato posto un cut-off λ all'estremo superiore dell'integrale, il quale verrà preso finito e trattato tramite metodi di rinormalizzazione.

Come accennato nel paragrafo 3.1, l'integrale così scritto risulta lungo e difficile da risolvere. Il calcolo può essere semplificato utilizzando l'approssimazione on-shell.

In questo modo, si ottiene che

$$\frac{k^2 - \omega'}{2} = 0$$

Questa condizione rende la soluzione molto più semplice.

Le varie parti dell'integrale possono essere scritte, in coordinate sferiche, come

- $a_1(\mathbf{k}, \omega) = [\frac{k^2}{q} \cos^2 \theta + 2k \cos \theta + q - \frac{k_F^2}{q}] \log(q^2 - k_F q + kq \cos \theta)$
- $a_{-1}(\mathbf{k}, \omega) = -[\frac{k^2}{q} \cos^2 \theta + 2k \cos \theta + q - \frac{k_F^2}{q}] \log(q^2 + k_F q + kq \cos \theta)$
- $a_2(\mathbf{k}, \omega) = [q + 2k \cos \theta] \log(\frac{q^2}{2} + kq \cos \theta)$
- $a_3(\mathbf{k}, \omega) = [\frac{k^2}{q} \cos^2 \theta - \frac{k_F^2}{q}] \log(k_F q + kq \cos \theta)$
- $p_1(\mathbf{k}, \omega) = \frac{q}{2} + k_F + k \cos \theta$
- $p_2(\mathbf{k}, \omega) = 2k_F + 2\frac{k_F k}{q} \cos \theta$

L'integrale (3.22) è stato risolto utilizzando queste ultime condizioni con l'ausilio del programma di calcolo simbolico `mathematica` e ne viene, dunque, riportata solo la soluzione completa della correzione al secondo ordine dell'autoenergia (equazione (3.23)).

$$\begin{aligned} \Delta E(k; \lambda) = & -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2 2m\pi^2}{\hbar^2} I_q(\mathbf{k}; \lambda) = -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2 2m\pi^2}{\hbar^2} k_F^4 \left\{ \frac{\lambda}{15k_F} \left[11 + \left(\frac{k}{k_F} \right)^2 + 11 \left(\frac{\lambda}{k_F} \right)^2 \right] \right. \\ & (3.23) \\ & - \frac{k_F}{60k} \left[\frac{\lambda}{k_F} - \left(\frac{k}{k_F} + 1 \right) \right]^3 \left[4 - \left(\frac{k}{k_F} \frac{\lambda}{k_F} - 3 \right) \left(\frac{k}{k_F} + 4 \frac{\lambda}{k_F} \right) \right] \log \left| \frac{\lambda}{k_F} - \left(\frac{k}{k_F} + 1 \right) \right| \\ & + \frac{k_F}{60k} \left[\frac{\lambda}{k_F} - \left(\frac{k}{k_F} - 1 \right) \right]^3 \left[4 - \left(\frac{k}{k_F} \frac{\lambda}{k_F} + 3 \right) \left(\frac{k}{k_F} + 4 \frac{\lambda}{k_F} \right) \right] \log \left| \frac{\lambda}{k_F} - \left(\frac{k}{k_F} - 1 \right) \right| \\ & + \frac{k_F}{60k} \left[\frac{\lambda}{k_F} + \left(\frac{k}{k_F} - 1 \right) \right]^3 \left[4 - \left(\frac{k}{k_F} \frac{\lambda}{k_F} + 3 \right) \left(\frac{k}{k_F} - 4 \frac{\lambda}{k_F} \right) \right] \log \left| \frac{\lambda}{k_F} + \left(\frac{k}{k_F} - 1 \right) \right| \\ & - \frac{k_F}{60k} \left[\frac{\lambda}{k_F} + \left(\frac{k}{k_F} + 1 \right) \right]^3 \left[4 - \left(\frac{k}{k_F} \frac{\lambda}{k_F} - 3 \right) \left(\frac{k}{k_F} - 4 \frac{\lambda}{k_F} \right) \right] \log \left| \frac{\lambda}{k_F} + \left(\frac{k}{k_F} + 1 \right) \right| \\ & + \Theta'(k^2 - 2k_F^2) \left[\left(\frac{k}{k_F} \right)^2 - 2 \right]^{\frac{5}{2}} \frac{4k_F}{15k} \left[\arctan \left(\frac{k_F}{\sqrt{k^2 - 2k_F^2}} \right) + \arctan \left(\frac{2k_F - k}{\sqrt{k^2 - 2k_F^2}} \right) \right] \\ & + \Theta''(2k_F^2 - k^2) \left[2 - \left(\frac{k}{k_F} \right)^2 \right]^{\frac{5}{2}} \frac{k_F}{15k} \left[\log \left(\frac{2k_F + \sqrt{2k_F^2 - k^2}}{2k_F - \sqrt{2k_F^2 - k^2}} \right) - \log \left(\frac{k_F - k + \sqrt{2k_F^2 - k^2}}{5k_F - k - \sqrt{2k_F^2 - k^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left[2 \left(\frac{k}{k_F} \right)^2 - 1 \right] \log \left[\frac{k + k_F}{2(k - k_F)} \right] \\
& - \frac{1}{60} \left(\frac{k}{k_F} \right)^4 \left[\log \left(\frac{k}{k - k_F} \right) + 55 \log \left(\frac{k}{k + k_F} \right) \right] \\
& + \frac{k}{3k_F} \left[4 \log \left(\frac{k + k_F}{k - k_F} \right) + \log \left(\frac{k}{k - k_F} \right) \right] \\
& - \frac{k_F}{15k} \left[3 \log \left(\frac{k}{k - k_F} \right) + 16 \log \left(\frac{k_F}{k - k_F} \right) + 8 \log \left(\frac{k + k_F}{k - k_F} \right) \right] \\
& - \frac{47}{30} \left(\frac{k}{k_F} \right)^3 + \frac{17}{30} \left(\frac{k}{k_F} \right)^4 \left[\frac{23}{60} \left(\frac{k}{k_F} \right)^4 + \frac{4k_F}{3k} \right] \log 2 + \frac{89}{30} \frac{k}{k_F} - \frac{2k_F}{k} \frac{14}{15} \left(\frac{k}{k_F} \right)^2 - \frac{31}{30} \Bigg\}
\end{aligned}$$

Il termine k_F^4 è stato aggiunto in modo da rendere la parte tra parentesi graffe adimensionale. In questo modo, la correzione al secondo ordine dell'autoenergia può essere scritta come

$$\Delta E(k; \lambda) = -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2 2m\pi^2}{\hbar^2} k_F^4 f(k; \lambda) \quad (3.24)$$

in cui $f(k; \lambda) = \frac{I(k; \lambda)}{k_F^4}$.

Sviluppando $f(k; \lambda)$ per valori di λ molto grandi ($\lambda \rightarrow \infty$), è possibile verificarne la linearità in λ , come previsto nel paragrafo 1.3.1.

Capitolo 4

Risultati numerici e rinormalizzazione

4.1 Criteri generali per la rinormalizzazione

Nel capitolo precedente è stata ottenuta un'espressione analitica della correzione all'ordine perturbativo più basso dell'autoenergia (equazione (3.24)), la quale risulta dipendere dal parametro di cut-off λ . A quest'ultimo non può essere attribuito un significato fisico ben preciso; si sa solo che esso rappresenta il limite massimo del valore dei momenti trasferiti, ma in fisica nucleare non vi è un cut-off naturale di energia e di momento a scale basse ma vi è solo un limite molto alto corrispondente alla massa del pione. È necessario, dunque, ricorrere a metodi di *rinormalizzazione*.

Generalmente, essi consistono nel far dipendere da λ , in maniera analitica o empirica, i parametri presenti nell'espressione analitica, in modo che quest'ultima riproduca dei dati valori sperimentali ad ogni valore di λ .

Un esempio è quello della massa efficace, già trattata nel paragrafo 2.2.1. In questo caso, una volta ricavata l'espressione analitica, è possibile confrontarla con risultati empirici o basati su calcoli microscopici, rinormalizzando quindi i parametri dell'interazione in funzione di λ .

Questo procedimento non è, però, possibile se si utilizza l'equazione (3.24), dal momento che essa non è un'osservabile, come descritto nel paragrafo 3.1.

Ciò che è sembrato più opportuno fare, a questo punto, è stato confrontare il lavoro qui svolto con quello di altri autori. In particolare, è stato scelto l'articolo [7], in cui è presente un risultato simile al nostro, ma sotto condizioni differenti. Tra il lavoro svolto nell'articolo [7] e questo vi sono alcune sostanziali differenze. Innanzitutto, i calcoli fatti dagli autori dell'articolo non prevedono l'utilizzo di un potenziale di contatto, bensì di un potenziale di Yukawa, come quello descritto

nell'equazione (4.1).

$$V(r) = v_0 e^{-\mu r} \quad (4.1)$$

Inoltre, viene utilizzata la seguente legge di dispersione

$$\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_{HF}(k), \quad (4.2)$$

in cui V_{HF} rappresenta il primo ordine perturbativo calcolato utilizzando il modello di HF.

Nel nostro caso, invece, l'equazione (4.2) è stata semplificata, ponendo

$$\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (4.3)$$

ovvero considerando la particella all'ordine zero libera.

Per ottenere un confronto, è, dunque, necessario adattare il risultato qui ottenuto a quello dell'articolo.

Innanzitutto, bisogna notare che, nel caso in cui si scelgano valori di k vicini a k_F , l'approssimazione (4.3) può essere considerata ragionevole [7]. Infatti, considerando la legge (4.2), si ottiene

$$\omega - \omega_F = \frac{\hbar^2(k^2 - k_F^2)}{2m} + V_{HF}(k) - V_{HF}(k_F) \quad (4.4)$$

Per $k \sim k_F$, si ha la seguente espansione:

$$V_{HF}(k) \approx V_{HF}(k_F) + \left. \frac{\partial V_{HF}(k)}{\partial k} \right|_{k=k_F} (k - k_F) \quad (4.5)$$

Per un'interazione di Skyrme tipo quella qui utilizzata, si può dimostrare che [10]

$$\left. \frac{\partial V_{HF}(k)}{\partial k} \right|_{k=k_F} = \frac{1}{12\pi} k_F^4 \Theta_s, \quad (4.6)$$

in cui Θ_s è un parametro dell'interazione di Skyrme [8, pag. 716].

A questo punto, l'equazione (4.4) diventa

$$\omega - \omega_F \approx \frac{\hbar^2(k^2 - k_F^2)}{2m} + \frac{1}{12\pi} k_F^5 \Theta_s \left(\frac{k}{k_F} - 1 \right) \quad (4.7)$$

La costante Θ_s risulta dell'ordine di 10^{-3} MeV fm^5 .

In questo modo, il secondo termine di destra dell'equazione (4.7) risulta molto più piccolo rispetto al primo, facendo sì che esso possa essere trascurato.

A questo punto, è necessario rinormalizzare l'equazione (3.24) in modo che il potenziale qui utilizzato sia confrontabile con quello dell'articolo.

Innanzitutto, per eliminare la dipendenza da Ω , è stato scelto di utilizzare la seguente equazione

$$v = \frac{g}{\Omega}, \quad (4.8)$$

ricavata tramite la trasformata di Fourier dell'espressione del potenziale (1.15).

In questo modo, l'equazione (3.24) può essere scritta in termini di g .

$$\Delta E(k; \lambda) = -d \frac{g^2 m \pi}{(2\pi)^5 \hbar^2} k_F^4 f(k; \lambda) \quad (4.9)$$

La costante g può essere ricavata tramite la sua definizione [9]:

$$g = t_0 + \frac{1}{6} t_3 \rho^\alpha, \quad (4.10)$$

in cui t_0 , t_3 ed α sono delle costanti.

Utilizzando $\rho = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ (densità del sistema) e $k_F = 1.33 \text{ fm}^{-1}$ (corrispondente momento di Fermi in base all'equazione (1.7) e (1.8) se $g_s = 4$), si è ottenuto un valore numerico di $g = -634.083 \text{ MeV fm}^3$.

Ora è possibile rinormalizzare la costante g , in modo che il risultato qui ottenuto sia paragonabile con quello di [7].

A tale scopo, si è scelto di confrontare il valore di ΔE corrispondere a $k \sim k_F$ preso dalla figura 5 di pagina 23 dell'articolo [7], in cui ΔE viene chiamato V_{PO} (ovvero correzione di polarizzazione), con il valore, sempre relativo a $k \sim k_F$, calcolato tramite l'equazione (4.9).

Per quest'ultimo calcolo, si è utilizzato $g = -634.083 \text{ MeV fm}^3$, ottenuto dall'equazione (4.10), e $\lambda = 4k_F$. Il valore di λ è puramente indicativo ed è stato scelto tenendo conto che $\lambda \geq k + k_F$ (si vedano gli estremi di integrazione di q). Poiché l'equazione (4.9) è valida per $k_F < k < 3k_F$, è utile considerare valori di $\lambda \geq 4k_F$. Il rapporto tra $\Delta E(k \sim k_F)$ e $V_{PO}(k \sim k_F)$ risulta

$$R = \frac{\Delta E(k \sim k_F)}{V_{PO}(k \sim k_F)} \approx 36$$

Per far sì che R sia circa uguale ad 1, è necessario riscalarlo il valore di g^2 di un fattore 36, ricavando $g' = \frac{g}{6}$.

4.2 Confronto numerico dei risultati per l'autoenergia

Grazie alle osservazioni precedentemente fatte, è ora possibile ottenere un confronto tra il grafico della correzione dell'autoenergia ricavato nell'articolo [7] e quello ottenuto con l'equazione (4.9).

Ambedue sono riportati in figura 4.1. Per un confronto più immediato, ΔE è stata rappresentata in termini di $\omega - \omega_F$ utilizzando, però, la legge di dispersione $\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

Nonostante i valori riportati nei grafici siano differenti, è possibile confrontare l'ordine di grandezza; in particolare quando $\omega \sim \omega_F$.

Per valori di ω troppo differenti da ω_F ($\omega - \omega_F > 50$ MeV), i due grafici presentano un andamento differente. Infatti, il grafico 4.1a decresce, al contrario di ciò che succede nel grafico 4.1b. Questo è dovuto al fatto che in tale range, il potenziale $V_{HF}(k)$ non può essere trascurato, dal momento che $k \gg k_F$; dunque, l'approssimazione fatta considerando $\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ non è più valida. Per questo motivo, d'ora in poi sarà considerata solo la parte di grafico in cui $\omega - \omega_F < 50$ MeV.

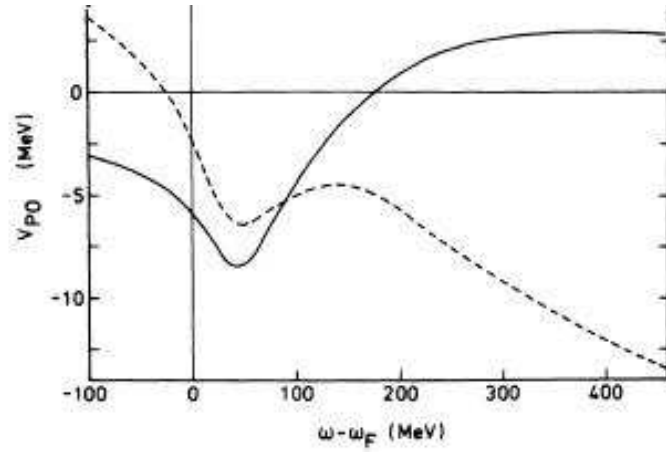
4.3 Rinormalizzazione

Grazie ai risultati ottenuti nel precedente paragrafo, si può affermare che, considerando una g riadattata, il risultato ottenuto è ragionevole, nonostante non dia risultati esatti. A questo punto, è possibile rinormalizzare la g in modo che l'equazione (4.9) restituisca dei valori di riferimento fissi per ogni λ .

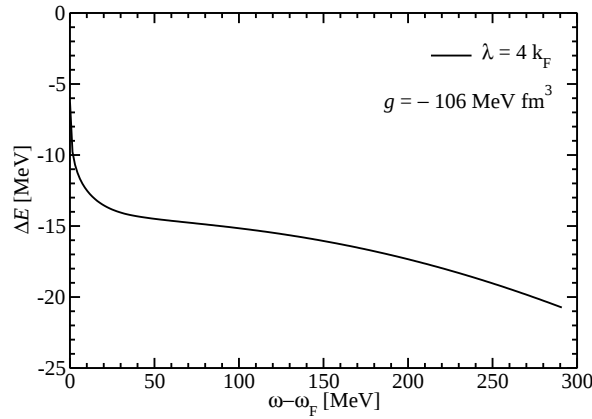
I valori di riferimento utilizzati per la rinormalizzazione sono quelli relativi al grafico 4.1b, ovvero, considerando sempre $k_F = 1.33 \text{ fm}^{-1}$, $g = -106 \text{ MeV fm}^3$ e $\lambda = 4k_F$.

Nella figura 4.2a sono riportati i grafici di ΔE al variare di λ con g costante.

Il metodo di rinormalizzazione è simile a quello utilizzato per calcolare g' . Per differenti λ , è stato fatto il rapporto dei valori assunti da ogni curva al variare di ω con quelli ricavati dalla curva di riferimento. Poiché il rapporto varia al variare di ω , è stato necessario scegliere un singolo punto di ogni curva in cui rinormalizzare g . La scelta è stata fatta considerando il valore medio dei singoli rapporti, in modo da avere un metodo sistematico da poter applicare ad ogni curva. Come



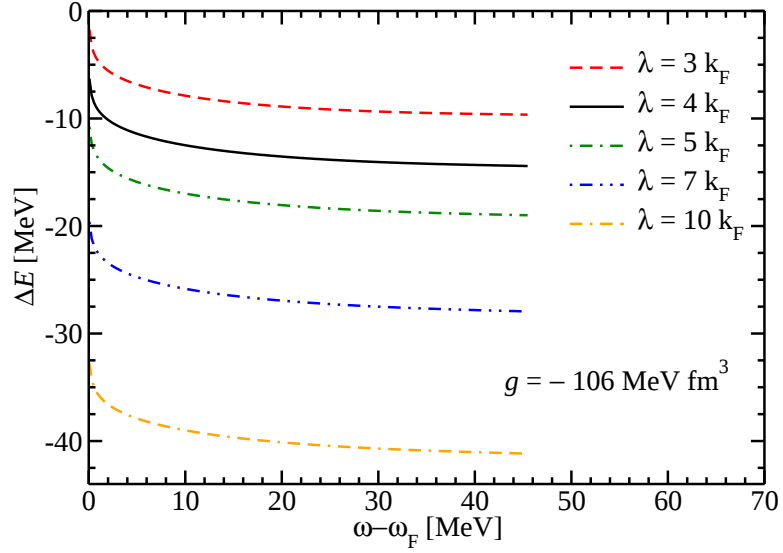
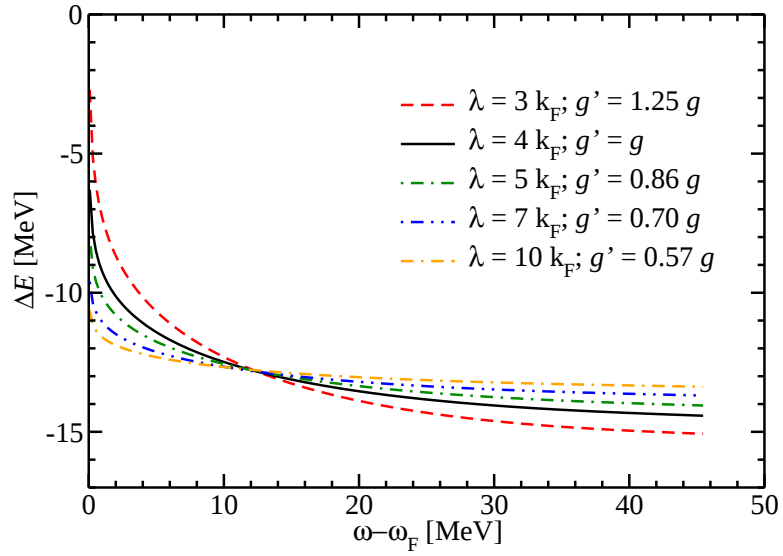
(a) Grafico della correzione al secondo ordine perturbativo riportato nell'articolo [7].



(b) Grafico della correzione al secondo ordine perturbativo ricavato tramite l'equazione (4.9) con $g' = \frac{g}{6}$.

Figura 4.1: Confronto dei grafici della correzione al secondo ordine perturbativo dell'autoenergia

fatto per g' , il rapporto è stato utilizzato come valore di riscaldamento di g . Poiché si è scelto di ridurre il dominio di ΔE ai valori $\omega - \omega_F < 50$ MeV, λ può assumere valori più piccoli di $4k_F$. Più precisamente, il valore massimo di k utilizzato per la rinormalizzazione è $1.5k_F$. Dunque, si ha che $\lambda > 2.5k_F$. I grafici di ΔE con g rinormalizzata sono riportati in figura 4.2b, in cui g riportata nella legenda ha valore $g = -106 \text{ MeV fm}^{-3}$.

(a) Valori con g costante.(b) Valori con g rinormalizzato per ogni λ .**Figura 4.2:** Grafici dei valori di ΔE al variare di λ

Conclusioni

In fisica nucleare, le correzioni oltre campo medio sono molto importanti; in modo particolare, quando si tratta descrivere le proprietà degli stati di particella singola. Infatti, i modelli di campo medio descrivono bene proprietà generali dei nuclei come le masse, i raggi, le deformazioni, ma non così bene fenomeni osservati con la spettroscopia dettagliata.

Le correzioni oltre campo medio sono calcolate da molti gruppi in diverse maniere. Spesso, come in questo elaborato, si semplifica il problema calcolando le proprietà di singola particella per un sistema uniforme, a densità costante: la materia nucleare. Lo scopo di questo elaborato è affrontare questo problema utilizzando un potenziale a range nullo, ovvero di contatto. Infatti, tale potenziale è semplice da usare e può essere trasferito in numerosi contesti.

Nella letteratura esistono già calcoli microscopici dell'autoenergia in materia nucleare svolti utilizzando diversi tipi di potenziale [7]. Nel caso qui trattato, in cui si considera un potenziale di contatto, i calcoli risultano semplici, grazie alla forma del potenziale; però, come evidenziato nel corso dell'elaborato, rimane il problema della divergenza generata dal fatto che vengono considerate energie troppo alte rispetto alla scala di energia naturale del sistema. Questo rende necessario porre manualmente un cut-off sui momenti trasferiti.

Nessuno ha mai risolto il problema utilizzando una tecnica coerente di rinormalizzazione, ovvero riscalandolo l'interazione in modo da ottenere dei risultati indipendenti dal cut-off suddetto. È bene, dunque, utilizzare queste tecniche di rinormalizzazione, come già fatto da alcuni autori ma solamente per l'energia totale. Tali tecniche di rinormalizzazione sono meno semplici da usare nel caso presente; quindi, nel corso dell'elaborato è stato necessario ricorrere a delle semplificazioni che non hanno permesso di riprodurre in gran dettaglio i risultati già ottenuti con un modello più accurato, ma che comunque possono essere ritenute ragionevoli.

In particolare, è stato riprodotto con un potenziale di contatto molto semplice l'ordine di grandezza dell'autoenergia ottenuta con modelli sofisticati ed è stato

mostrato che è possibile rinormalizzare l'interazione affinché i risultati siano invarianti in funzione del cut-off.

Se ne conclude che la strategia utilizzata dia risultati promettenti e possa, dunque, essere utilizzata per continuare su una strada più realistica.

Appendice A

Soluzione completa del dominio di integrazione della variabile $\mathbf{l}$

Per visualizzare meglio la situazione, riportiamo qui l'equazione (3.12):

$$I(k, \omega) = -d \frac{\Omega^2}{(2\pi)^6} \frac{v^2 m}{\hbar^2} \int_{\substack{l < k_F \\ |\mathbf{l} + \mathbf{q}| > k_F}} d^3 \mathbf{l} \frac{1}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + \mathbf{q} \cdot (\mathbf{l} - \mathbf{k})},$$

Il dominio è composto da due condizioni sui vettori $\mathbf{l}$ e $\mathbf{q}$, ovvero

$$\begin{cases} l < k_F; \\ |\mathbf{l} + \mathbf{q}| > k_F, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

le quali possono essere rappresentate graficamente in un grafico cartesiano.

Poiché $\mathbf{q}$ è una variabile libera, non dipendente né da $\mathbf{l}$ né dalle variabili cartesiane, può essere scelta e fissata in modo da semplificare la rappresentazione e lo sviluppo del dominio. In questo elaborato, si è scelto di porla solidale con l'asse z .

A questo punto, è possibile dare una prima rappresentazione del dominio (figura A.1).

Per rispettare le condizioni richieste, la variabile $\mathbf{l}$ può muoversi solo all'interno della sfera verde escludendo la parte di intersezione delle due sfere.

Quando la variabile $\mathbf{q}$ risulta maggiore di $2k_F$, non si ha più l'intersezione tra le sfere. Per tale motivo, l'integrazione può essere fatta all'interno di tutta la sfera verde.

Questa distinzione, fa sì che il risultato dell'integrale risulti differente per i due domini.

Poiché il dominio gode di simmetria cilindrica, la variabile $\mathbf{l}$ può essere scritta utilizzando le coordinate cilindriche.

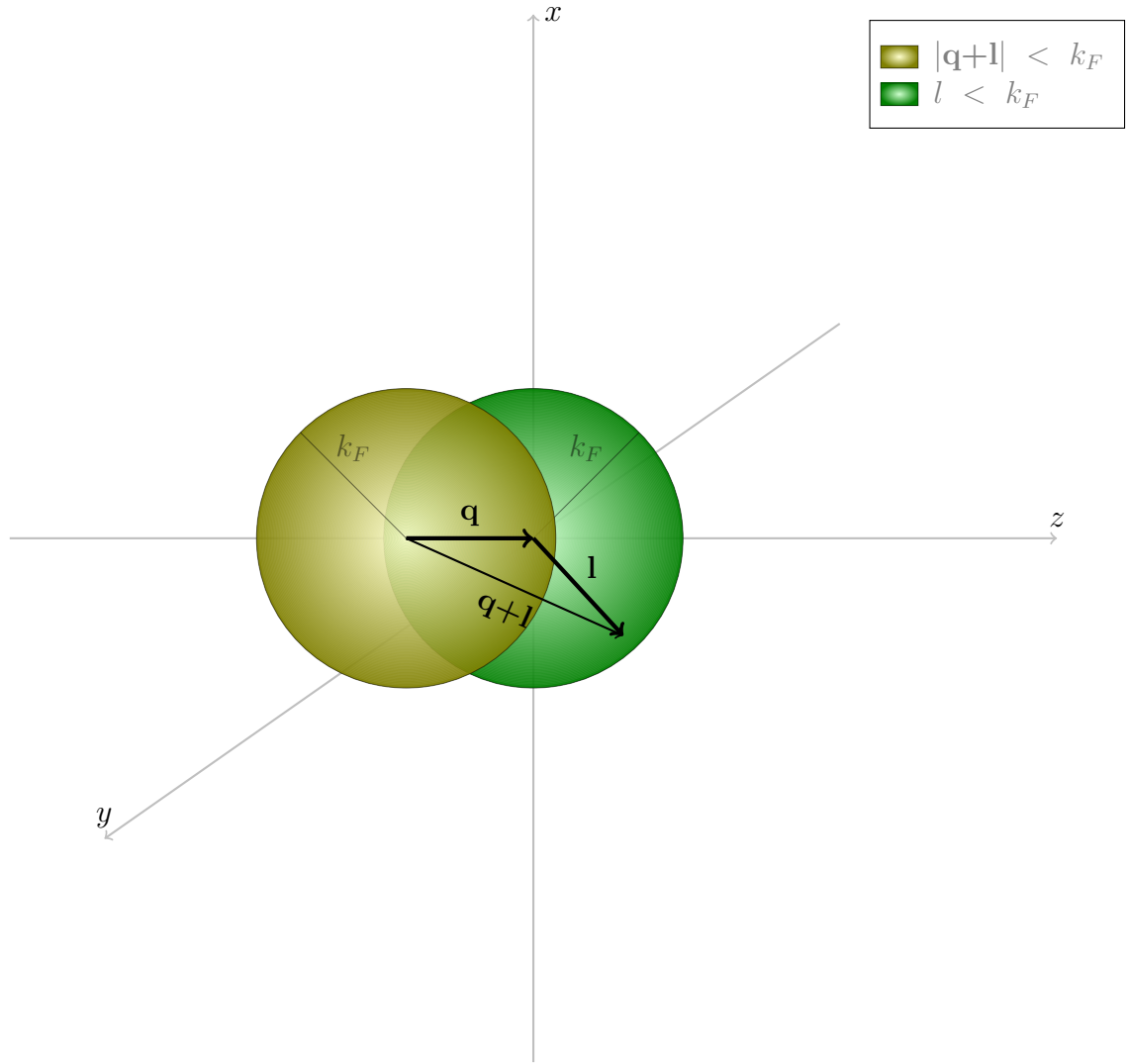


Figura A.1: Dominio di integrazione della variabile $\mathbf{l}$ quando $q < 2k_F$

$$\begin{cases} l_x = \rho \cos \theta \\ l_y = \rho \sin \theta \\ l_z = l_z \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

in cui l_x , l_y ed l_z sono le componenti cartesiane di $\mathbf{l}$.

Nel caso in cui $q < 2k_F$, l'integrale può essere, dunque, scritto come

$$\begin{aligned} I_1(k, \omega) = & \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_{-\frac{q}{2}}^{-q+k_F} dl_z \int_{\sqrt{k_F^2 - (q+l_z)^2}}^{\sqrt{k_F^2 - l_z^2}} d\rho \rho \frac{1}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + l_z q - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \right. \\ & \left. + \int_{-q+k_F}^{k_F} dl_z \int_0^{\sqrt{k_F^2 - l_z^2}} d\rho \rho \frac{1}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + l_z q - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \right] \end{aligned}$$

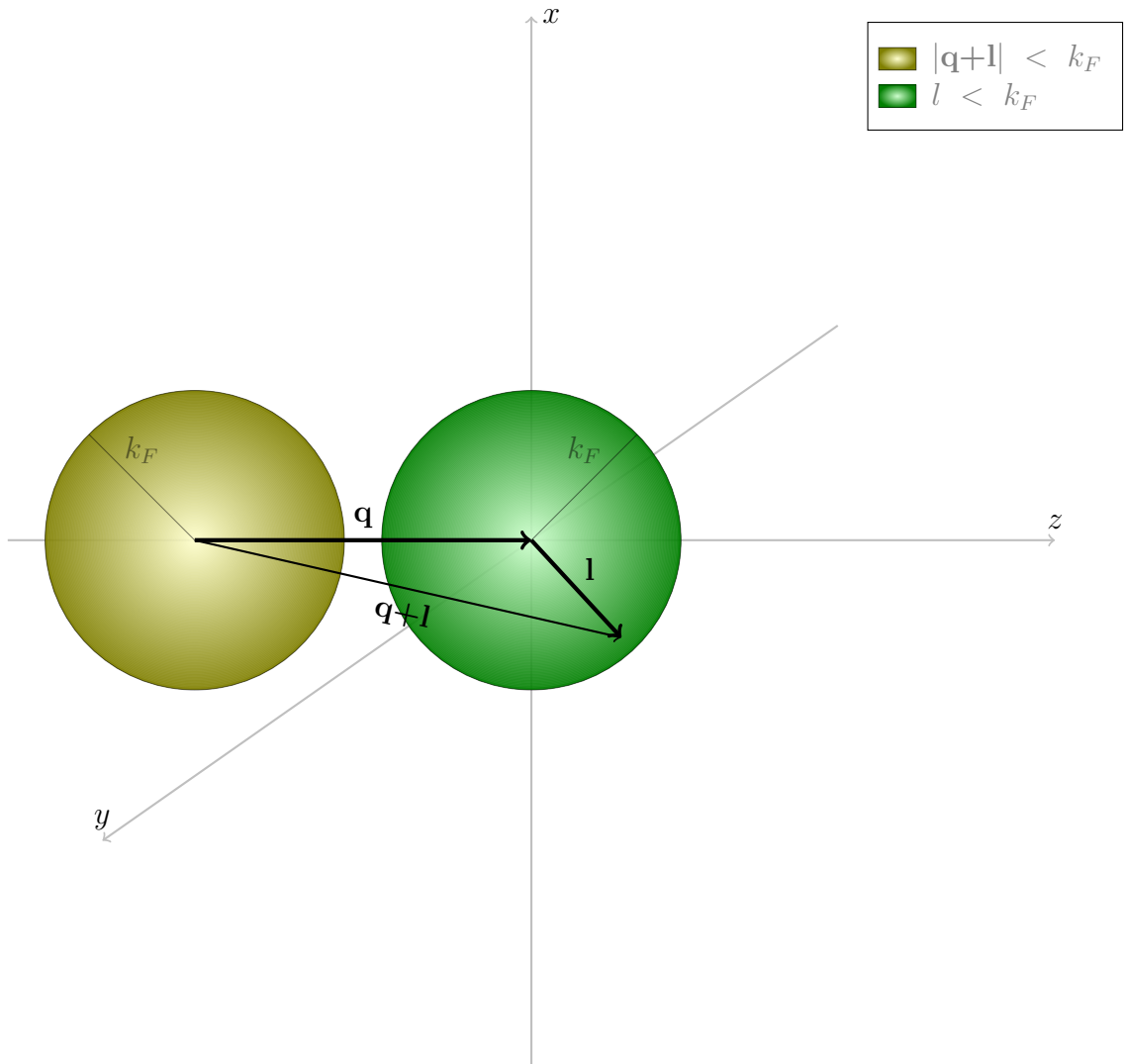


Figura A.2: Dominio di integrazione della variabile $\mathbf{l}$ quando $q > 2k_F$

in cui $\rho = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$.

Nel secondo caso, invece (in cui $q > 2k_F$), l'integrale risulta

$$I_2(k, \omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-k_F}^{k_F} dl_z \int_0^{\sqrt{k_F^2 - l_z^2}} d\rho \rho \frac{1}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + l_z q - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}$$

Appendice B

Soluzione completa del calcolo della correzione al secondo ordine perturbativo dell'autoenergia

B.1 Integrale in l per $q < 2k_F$

$$\begin{aligned}
I_1(k, \omega) &= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_{-\frac{q}{2}}^{-q+k_F} dl_z \int_{\sqrt{\frac{k_f^2}{2} - (q+l_z)^2}}^{\sqrt{k_f^2 - l_z^2}} d\rho \frac{1}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + l_z q - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \right. \\
&\quad \left. + \int_{-q+k_F}^{k_F} dl_z \int_0^{\sqrt{k_F^2 - l_z^2}} d\rho \frac{1}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + l_z q - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \right] = \\
&\quad \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_{-\frac{q}{2}}^{-q+k_F} dl_z \frac{q^2 + 2ql_z}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + l_z q - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \right. \\
&\quad \left. + \int_{-q+k_F}^{k_F} dl_z \frac{k_F^2 - l_z^2}{\frac{k^2 - \omega'}{2} + q^2 + l_z q - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \right] = \\
&\quad \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ q \log\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \frac{q^2}{2}\right) - q \log\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + k_F q\right) \right. \\
&\quad + 2 \frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} [\log\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \frac{q^2}{2}\right) - \log\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + k_F q\right)] + 2k_F - q + \\
&\quad + \frac{1}{q} \left(\frac{\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q}\right)^2 [\log\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + k_F q\right) - \log\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 + k_F q\right)] \\
&\quad \left. + q [\log\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + k_F q\right) - \log\left(\frac{k^2 - \omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 + k_F q\right)] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\left(\frac{\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q}\right) \left[\log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + k_F q\right) - \log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 + k_F q\right) \right] \\
& - \frac{k_F^2}{q} \left[\log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + k_F q\right) - \log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 + k_F q\right) \right] + \frac{q}{2} - k_F \\
& \quad \left. + \frac{\frac{k^2-\omega'}{2} + q^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right\} = \\
& \pi \left\{ q \left[\log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \frac{q^2}{2}\right) - \log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 + k_F q\right) \right] \right. \\
& + 2\left(\frac{\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q}\right) \left[\log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \frac{q^2}{2}\right) - \log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 + k_F q\right) \right] \\
& + \frac{1}{q} \left(\frac{\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q}\right)^2 \left[\log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + k_F q\right) - \log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 + k_F q\right) \right] \\
& - \frac{k_F^2}{q} \left[\log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + k_F q\right) - \log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 + k_F q\right) \right] - \frac{q}{2} + k_F \\
& \quad \left. + \frac{\frac{k^2-\omega'}{2} + q^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right\} = \\
& \pi \left\{ \left[\frac{k_F^2}{q} - 2\left(\frac{\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q}\right) - \frac{1}{q} \left(\frac{\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q}\right)^2 - q \right] \log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2 + k_F q\right) \right. \\
& + \left[q + 2\left(\frac{\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q}\right) \right] \log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \frac{q^2}{2}\right) + \left[\frac{1}{q} \left(\frac{\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q}\right)^2 - \frac{k_F^2}{q} \right] \log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + k_F q\right) \\
& \quad \left. - \frac{q}{2} + k_F + \frac{\frac{k^2-\omega'}{2} + q^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q} \right\}
\end{aligned}$$

B.2 Integrale in $\mathbf{l}$ per $q > 2k_F$

$$\begin{aligned}
I_2(k, \omega) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-k_F}^{k_F} dl_z \int_0^{\sqrt{k_F^2 - l_z^2}} d\rho \rho \frac{1}{\frac{k^2-\omega'}{2} + q^2 + l_z q - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} = \\
& \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-k_F}^{k_F} dl_z \frac{k_F^2 - l_z^2}{\frac{k^2-\omega'}{2} + q^2 + l_z q - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} = \\
& \pi \left\{ \frac{k_F^2}{q} \left[\log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} + q^2 + k_F q - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}\right) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \log\left(\frac{k^2-\omega'}{2} + q^2 - k_F q - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}\right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{q}\left(\frac{\frac{k^2-\omega'}{2}+q^2-\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{q}\right)^2[\log(\frac{k^2-\omega'}{2}+q^2+k_Fq-\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})-\log(\frac{k^2-\omega'}{2}+q^2-k_Fq-\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})] \\
& \quad + 2k_F\frac{\frac{k^2-\omega'}{2}+q^2-\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{q^2}\Bigg\} = \\
& \pi\left\{\left[\frac{k_F^2}{q}-2\left(\frac{\frac{k^2-\omega'}{2}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{q}\right)-\frac{1}{q}\left(\frac{\frac{k^2-\omega'}{2}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{q}\right)^2-q\right]\log\left(\frac{k^2-\omega'}{2}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}+q^2+k_Fq\right)\right. \\
& \quad +\left[\frac{1}{q}\left(\frac{\frac{k^2-\omega'}{2}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{q}\right)^2+2\left(\frac{\frac{k^2-\omega'}{2}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{q}\right)+q-\frac{k_F^2}{q}\right]\log\left(\frac{k^2-\omega'}{2}+q^2-k_Fq-\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}\right) \\
& \quad \left.+ 2k_F\frac{\frac{k^2-\omega'}{2}+q^2-\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{q^2}\right\}
\end{aligned}$$

Ringraziamenti

Desidero, innanzitutto, ringraziare il Professore Gianluca Colò e Xavier Roca Maza per il prezioso aiuto che mi hanno dato e per le numerose ore dedicate durante la stesura di questo elaborato.

Vorrei ringraziare tutta la mia famiglia per il loro sostegno sia psicologico che economico, ambedue indispensabili, e per tutti i preziosi consigli che mi hanno dato.

Ringrazio di cuore anche Massimiliano Marchetti, perchè mi è stato vicino in tutti questi anni, sopportando i miei momenti di agitazione e dandomi un grande supporto.

Desidero, inoltre, ringraziare i miei compagni, in particolare Gabriele Camoni, Eliana Masha e Rosaria Pileci, con i quali ho condiviso tutti questi anni di università, oltre che tanti bei momenti di ilarità, e tutti i miei amici di Piacenza, senza i quali questo lavoro non avrebbe lo stesso spirito.

Bibliografia

- [1] A.L. Fetter, J.D.Walecka. *Quantum Theory of Many-particle System*. Doover Books on Physics, Doover Publication, 2003.
- [2] A. Bohr, B. R. Mottelson. *Nuclear structure*, Volume 1 - *Single-Particle Motion*. W. A Benjamin, Inc., Copenhagen, 1969
- [3] Paul-Henri Heenen, Michael Bender. *Self-consistent mean-field Models for Nuclear Structure*. Review of Modern Physics,75,01 2003.
- [4] P. Ring, P. Schuck. *The Nuclear Many-Body Problem*. Physics and astronomy online library. Springer, 2004.
- [5] R. D. Mattuck. *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*. Dover Books on Physics Series. Dover Publication, Second Edition, 1992
- [6] A. M Lane. *Nuclear Theory: pairing force correlations and collective motion*. W. A Benjamin, Inc., New York, 1963
- [7] V. Bernard, C. Mahaux. *Sel-energy in a Semirealistic Model of Nuclear Matter* Institute de Physique, Universit  de Li ge 1, Belgium. Physical Review C, February, 1981
- [8] E. Chabant, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, R. Shaeffer. *A Skyrme Parametrization from Subnuclear to Neutron Star Densities* Nuclear Physics A 627 710-746, 1997
- [9] K. Moghrabi, M. Grasso, G. Col , N. Van Giai. *Beyond Mean-Field Theories with Zero-Range Effective Interactions: A Way to Handle the Ultraviolet Divergence*. Physical Review Letters, 31 dicembre, 2015
- [10] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, R. Schaeffer. *Titolo Nuclear Physics* **A635**, (1998) 231