



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea triennale in Fisica

**Effetto della polarizzazione nucleare
sulla spettroscopia degli atomi muonici**

Relatore:

Prof. Gianluca Colò

Correlatore:

Dott. Javier Roca Maza

Tesi di Laurea di:
Federico Maffezzoni
Matricola: 866267

Anno Accademico 2017/2018

*“Lo scienziato non è l’uomo che fornisce le vere risposte; è quello che pone
le vere domande.”*
Claude Lévi-Strauss

Indice

Introduzione	3
1 L'atomo muonico	6
1.1 Caratteristiche principali dell'atomo muonico neutro	6
1.2 Struttura iperfine	9
1.3 Ulteriori correzioni nel calcolo dell'energia di legame degli stati muonici	11
1.4 Spettroscopia dell'atomo muonico	13
1.5 Struttura nucleare	15
2 Calcolo degli <i>shifts</i> energetici	18
2.1 L'Hamiltoniana del sistema	18
2.2 Calcolo analitico della correzione dell'energia	19
2.3 Calcolo del parametro B	22
3 Risultati numerici	25
3.1 Calcolo esplicito dello <i>shift</i> energetico dello stato muonico $1s_{1/2}$ nel ^{208}Pb mediante metodo EWSR	25
3.2 Calcolo esplicito dello <i>shift</i> energetico dello stato muonico $1s_{1/2}$ nel ^{208}Pb mediante RPA	27
4 Conclusioni	37
A Parametrizzazione del potenziale muonico	39
B Metodo alternativo per calcolare gli <i>shifts</i> energetici	43
Bibliografia	46

Introduzione

Il nucleo atomico è un sistema costituito da un numero A di nucleoni, suddivisi in Z protoni, di carica elementare positiva, e di N neutroni, globalmente neutri. Il muone è una particella fondamentale appartenente alla famiglia dei leptoni con carica pari a quella dell'elettrone, spin $1/2$, ma con massa notevolmente superiore ($105.658389 \pm 0.000034 \text{ MeV}/c^2$, circa 207 volte). Il muone fu scoperto nei raggi cosmici nel 1937 da Carl Anderson e Seth Neddermayer, che riuscirono a fotografarlo facendo uso di una camera a nebbia. Inizialmente si pensava che il muone fosse una particella di Yukawa, mesone mediatore della forza nucleare forte, ma successivamente, nel 1946, gli esperimenti di M. Conversi, E. Pancini e O. Piccioni fecero cadere quest'ipotesi. Essi dimostrarono la piccolezza dell'interazione tra muone e nucleo, di natura esclusivamente elettromagnetica [1].

L'interazione elettromagnetica costituisce una buona sonda per studiare il nucleo perché la conoscenza di tale interazione tra due cariche elettriche è ben nota. Per questo motivo lo *scattering* tra particella carica (proiettile) e nucleo (bersaglio) fornisce un utile strumento per studiare la struttura interna nucleare. Nel caso specifico in cui si utilizzi come particella proiettile un elettrone (trattato come oggetto puntiforme dotato di spin) la sezione d'urto elastica dell'interazione fornisce informazioni sul raggio quadratico medio o, più in generale, sulla distribuzione di carica del nucleo bersaglio. Il nucleo può essere ulteriormente sondato nel caso dell'atomo muonico in cui il muone, orbitando molto più vicino al nucleo rispetto agli elettroni, interagisce elettromagneticamente con esso.

Dagli anni Cinquanta agli Ottanta del Novecento venne studiato in modo approfondito il problema dell'atomo muonico sia in campo teorico - computazionale sia in quello sperimentale. Negli anni a seguire l'aspetto teorico di questo problema è stato abbandonato.

Per questo motivo abbiamo deciso di affrontare nuovamente la questione ritenendo che lo studio dell'atomo muonico sia ancora importante per analizzare la struttura interna nucleare.

In un atomo muonico il nucleo è circondato non solo da elettroni, ma

anche da un muone. Quando il muone viene catturato da un nucleo effettua una serie di transizioni al fine di posizionarsi nel suo stato fondamentale ($1s$). In questo processo un elettrone viene emesso per effetto Auger [2]. Il muone, nello stato fondamentale, orbita attorno al nucleo ad una distanza notevolmente inferiore rispetto agli elettroni, dato che la propria massa è ben superiore rispetto ad un ordinario elettrone. L'interazione Coulombiana muone-nucleo costituisce un problema autoconsistente: la dimensione finita del nucleo influenza l'orbitale del muone e il muone, a sua volta, produce una variazione della densità di carica nucleare. Tale fenomeno prende il nome di polarizzazione nucleare.

Nel presente lavoro ci proponiamo come obiettivo lo studio di tali stati eccitati e del loro effetto sulla spettroscopia dei livelli muonici, mediante metodo perturbativo.

Innanzitutto abbiamo deciso di affrontare il caso di nuclei pari-pari, il cui *ground state* (stato a energia più bassa) ha spin zero e abbiamo supposto di conoscere le funzioni d'onda degli stati nucleari imperturbati. Effetti di struttura fine verranno trascurati in quanto del tutto irrilevanti alla determinazione degli *shifts* energetici per effetto di polarizzazione nucleare. Data una massa del muone notevolmente superiore rispetto a quella dell'elettrone è lecito supporre che il muone, negli stati più bassi, orbiti ad una distanza decisamente inferiore rispetto agli elettroni che compongono il sistema; è quindi corretto trascurare effetti di *screening* elettronico.

Il problema è stato affrontato in un primo momento da un punto di vista analitico, la cui trattazione seguirà principalmente quella proposta nell'articolo di G. A. Rinker [3]. E' necessario introdurre un'Hamiltoniana efficace del sistema e trattare il termine di potenziale d'interazione residuo muone-nucleo, legato alla variazione della densità di carica nucleare per effetto di polarizzazione nucleare, come termine perturbativo. Nel caso di uno stato muonico $1s_{1/2}$ tale potenziale può essere parametrizzato in modo da agevolare i calcoli.

Successivamente abbiamo trattato lo studio degli *shifts* energetici nell'atomo muonico mediante il metodo delle regole di somma (in particolare usando la regola di somma pesata sull'energia, EWSR). Ci siamo soffermati in particolar modo al calcolo esplicito nel caso dello stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb .

In seguito abbiamo proseguito il lavoro calcolando sempre lo stesso *shift* energetico sfruttando un'altra tecnica: il metodo RPA.

La Random Phase Approximation (RPA) [4] è un metodo autoconsistente, implementato computazionalmente, basato su una teoria di campo medio di Hartree-Fock (HF), e costituisce uno strumento utile per lo studio degli stati eccitati nucleari. La novità è stata quella di modificare il programma

adattandolo al nostro bisogno, ossia introdurre come termine perturbativo il potenziale d'interazione muone-nucleo opportunamente parametrizzato. Così siamo riusciti a ottenere direttamente le ampiezze di transizione, definite nella sezione (1.5), per certi stati nucleari eccitati specifici, di fondamentale importanza per il calcolo dello *shift* energetico nello stato del piombo considerato [5].

Nel primo capitolo abbiamo fornito una descrizione generale dell'atomo muonico e accennato alcuni aspetti principali di struttura nucleare. Nel secondo capitolo abbiamo trattato le correzioni di polarizzazione nucleare dal punto di vista analitico introducendo tutti gli ingredienti fondamentali per il calcolo esplicito. Nel terzo capitolo abbiamo mostrato i risultati significativi dello *shift* energetico per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb . Infine, nel quarto capitolo sono state inserite le conclusioni e qualche cenno a possibili sviluppi dell'elaborato.

Capitolo 1

L'atomo muonico

1.1 Caratteristiche principali dell'atomo muonico neutro

La scoperta degli scienziati Conversi, Pancini e Piccioni della piccolezza dell'interazione tra muone-nucleo e la conseguente realizzazione che il muone non era una particella di Yukawa divenne un utile e interessante strumento con il quale il nucleo poteva e può essere sondato. Ci si rese conto che un mesone μ relativistico può essere rallentato nella materia condensata, catturato in stati legati attorno a un nucleo, e può effettuare transizioni di stato in un tempo breve rispetto a quello del suo decadimento o della cattura nucleare. Quindi c'era la forte possibilità che un atomo muonico potesse essere prodotto. Tali atomi sono di grande interesse tuttora perché un'indagine sui loro spettri può fornire utili informazioni sulla distribuzione della carica nucleare. Inoltre, se è possibile ottenere spettri di sufficiente accuratezza, si può determinare anche il momento angolare, il momento magnetico e la massa del mesone μ indipendentemente da altre misurazioni [1].

In generale, quando un muone viene bloccato dalla materia in un primo momento subisce il fenomeno di *scattering* tra un atomo e l'altro come se fosse un elettrone libero finché non perde una data quantità di energia tale per cui possa essere catturato in un'orbita alta di un particolare atomo. La condizione affinché ciò possa avvenire si ottiene quando l'energia del muone scende sotto i 2 keV e la sua velocità sia minore rispetto a quella degli elettroni di valenza. La probabilità di cattura nelle varie orbite dipende dalla composizione chimica e dalla struttura cristallina del materiale. Il muone spostandosi successivamente in orbite più basse, viene influenzato più degli elettroni dalla dimensione e dalla forma del nucleo che determina una sua possibile eccitazione.

Quando il primo muone viene catturato interagisce con gli elettroni atomici e con il nucleo, cadendo a cascata verso le orbite inferiori attraverso processi radiativi ed elettronici. In tale discesa, per atomi pesanti (ad esempio il ^{208}Pb) vi è una grande probabilità che il muone cada nello stato $2p$. Un fatto caratteristico dell'atomo muonico, nel caso di atomi pesanti, è che lo stato $2s$ giace più in alto dello stato $2p$. Questa particolarità è legata ad effetti di struttura fine, tra cui l'interazione fra il campo magnetico prodotto dal moto del muone e il suo stesso momento magnetico associato allo spin. Generalmente la cascata del muone verso un livello energetico basso è accompagnata dall'emissione di un elettrone cosiddetto di Auger e da una possibile eccitazione dello stato nucleare [2].

J. A. Wheeler ha dimostrato che per Z superiore a 15 le transizioni tra i livelli energetici alti sono generalmente di natura elettronica; invece, la probabilità di transizioni radiative tra le orbite più basse risulta essere nettamente superiore rispetto a quelle elettroniche. Quindi ci si aspetta una transizione radiativa tra lo stato $2p$ e lo stato $1s$ [6].

La transizione allo stato $1s$ è particolarmente importante perché tale stato è il più sensibile alla distribuzione di carica nucleare, mentre i livelli più alti diventano sempre più simili a quelli dell'idrogeno. Dal punto di vista sperimentale, inoltre la transizione $2p - 1s$ è anche la più facile da osservare grazie all'intensità dei raggi X emessi.

Nella figura (1.1) è schematizzato il processo di “cascata” del muone ed è messo in evidenza la transizione $2p - 1s$.

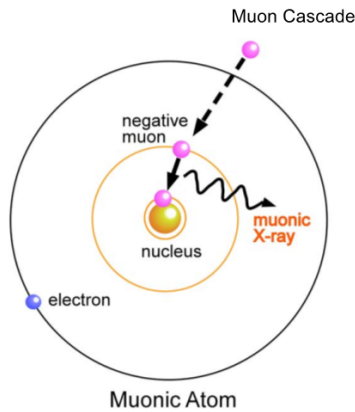


Figura 1.1: Processo di “cascata” muonica

Il tempo del processo di cattura e di cascata del muone in un livello di energia bassa è dell'ordine di $10^{-12} - 10^{-9}\text{s}$ cosicché quando raggiunge lo

stato $1s$ è ancora all'inizio della sua vita. In questo stato può sopravvivere per ancora $10^{-7} - 2 \times 10^{-6} \text{ s}$ prima che venga distrutto da un'interazione debole [7]. Il mesone μ^- può decadere in un elettrone e due neutrini ($\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$) con un tempo di dimezzamento $\tau_{1/2}$ pari a $2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ ($\tau = 3.17 \cdot 10^{-6} \text{ s}$)¹ oppure il muone può essere catturato dal nucleo producendo la reazione $\mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu$ con tempo di decadimento τ pari a $32.8/Z \mu\text{s}$ (con Z il numero di protoni del nucleo) [2]. La massa muonica si trasforma in energia d'eccitazione nucleare o come energia cinetica del neutrino. Per i nuclei leggeri, quindi, è più probabile che il mesone μ^- decada in un elettrone e due neutrini. Invece, per i nuclei pesanti è più probabile che avvenga il processo di cattura muonica, come si può notare se si prende come esempio il ^{208}Pb .²

L'utilizzo del mesone μ^- come sonda nucleare è possibile perché le orbite mesoniche sono molto più vicine al nucleo rispetto alle orbite degli elettroni corrispondenti. Osservando ancora una volta la figura (1.1), ci si rende conto qualitativamente di quanto il raggio medio delle orbite $2p$ e $1s$ sia effettivamente inferiore rispetto al raggio medio dell'orbita $1s$ dell'elettrone. Ciò è dovuto al rapporto tra la massa del muone e quella dell'elettrone, che è circa 210. Per fare un esempio, consideriamo il caso del ^{208}Pb : l'orbita dello stato muonico $2p$ vale circa 13 fm, quella dello stato muonico $1s$ è circa 7 fm (molto vicina al raggio nucleare R approssimato a 6.80 fm) [7]. Per elementi pesanti, il raggio medio dello stato fondamentale del muone può trovarsi anche all'interno del nucleo. Nel caso del piombo, per esempio, la probabilità di trovare il muone nello stato $1s$ all'interno del nucleo è di circa il 50%. Questo fatto è suggerito studiando la funzione d'onda muonica per lo stato $1s$ e confrontandola con la densità di carica nucleare. Per gli elementi pesanti quindi, i livelli di energia del mesone μ^- più bassi e le energie di transizione sono molto sensibili alla distribuzione di carica nucleare.

Nella figura(1.2) possiamo mettere a confronto la densità di carica nucleare con le funzioni d'onda degli stati muonici nel ^{208}Pb .

Gli effetti degli elettroni atomici sugli stati energetici muonici possono essere calcolati considerando l'effetto di *screening elettronico* come la riduzione della carica nucleare effettiva. Per gli stati muonici più bassi è corretto supporre che gli elettroni orbitino esternamente al muone e quindi questo effetto non deve essere considerato. Pertanto possiamo trattare il mesone μ e il nucleo come un sistema isolato [2].

Il fatto che la massa del muone sia molto più piccola rispetto a quella nucleare ci permette di considerare il nucleo come una sorgente quasi statica

¹ $\tau_{1/2} = \tau \ln(2) \Rightarrow \tau = \tau_{1/2} / \ln(2) = 2.2 \cdot 10^{-6} / \ln(2) = 3.17 \cdot 10^{-6} \text{ s}$.

² Tempo di cattura elettronica: $\tau = 32.8/Z = 32.8/82 = 0.40 \mu\text{s} = 0.40 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ (molto inferiore rispetto al tempo di decadimento in un elettrone e due neutrini).

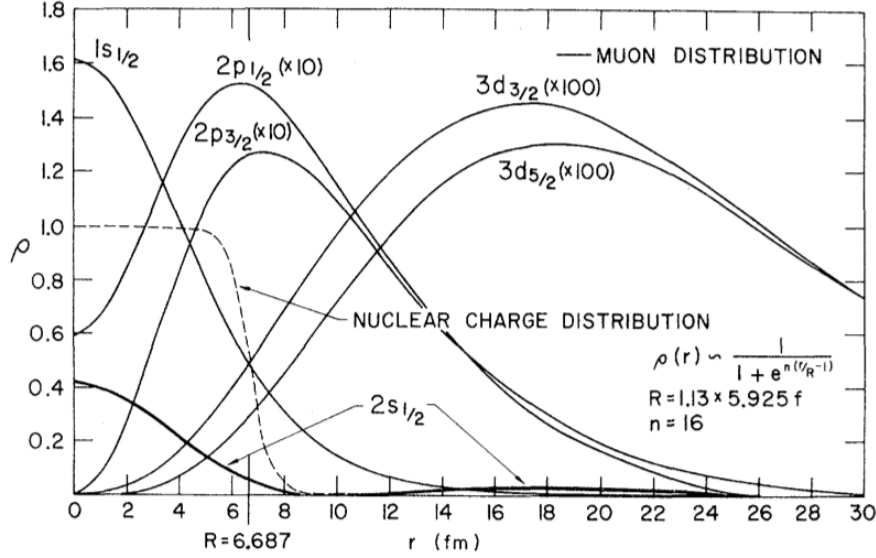


Figura 1.2: Funzioni d'onda muoniche nel ^{208}Pb e distribuzione di carica nucleare tale per cui $4\pi \int \rho(r)r^2 dr = 82$ [8]

di interazione Coulombiana e di trattare le correzioni degli *shifts* energetici dovuti a polarizzazione nucleare come perturbazione.

Infine supponiamo che le interazioni tra nucleo e muone siano esclusivamente di natura elettromagnetica perché tutte le forze di altra origine (forze deboli) sono estremamente piccole e non importanti (queste forze sono dell'ordine di 10^{-10} volte inferiori rispetto a quelle elettromagnetiche). Il nucleo, quindi, eccetto per un'interazione elettromagnetica, appare trasparente al muone [2].

Nella nostra trattazione dell'atomo muonico non consideriamo alcun effetto legato alla struttura iperfine in quanto trascurabile.

1.2 Struttura iperfine

Al momento angolare $\mathbf{L}$ di una particella di carica q e massa m (per esempio un elettrone o un muone) che ruota lungo un'orbita circolare di raggio r ad una velocità $\mathbf{v}$ è associato un momento di dipolo magnetico $\boldsymbol{\mu}$.

Poiché il periodo di rotazione della particella è dato da $\tau = 2\pi r/v$, la corrente che circola lungo l'orbita è data da $I = q/\tau = qv/(2\pi r)$. Ricordando la definizione di $\mathbf{L}$ ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = mrv\hat{\mathbf{n}}$, dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore perpendicolare

alla traiettoria), si può calcolare il valore del momento magnetico :

$$\boldsymbol{\mu} = I\pi r^2 \hat{\mathbf{n}} = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 \hat{\mathbf{n}} = \frac{q}{2} vr \hat{\mathbf{n}} = \frac{q}{2m} \mathbf{L} \quad (1.1)$$

Si può dimostrare che tale formula vale per qualsiasi forma dell'orbita.

La soluzione (1.1) esiste anche in meccanica quantistica, come relazione operatoriale. Per un muone avente carica $q = -q_e$ e massa $m = m_\mu$, dove il momento angolare è quantizzato in unità di $\hbar$, è conveniente scrivere $\boldsymbol{\mu}_\mu$ come:

$$\boldsymbol{\mu}_\mu = -\frac{q_e}{2m_\mu} \mathbf{L} = -\frac{\hbar q_e}{2m_\mu} \frac{\mathbf{L}}{\hbar} = -g_l \mu_\mu \frac{\mathbf{L}}{\hbar} \quad (1.2)$$

dove $\mu_\mu = \mu_B \frac{m_e}{m_\mu}$, con μ_B il magnetone di Bohr ($\mu_B = \frac{\hbar q_e}{2m_e} = 9.27401 \times 10^{-24} JT^{-1}$) e g_l il fattore giromagnetico.

Analogamente allo spin nucleare $\mathbf{I}$ è associato un momento magnetico nucleare $\boldsymbol{\mu}_N$ dato da:

$$\boldsymbol{\mu}_N = g_n \mu_n \frac{\mathbf{I}}{\hbar} \quad (1.3)$$

dove il magnetone nucleare μ_n è definito come : $\mu_n = \frac{q_e \hbar}{2M_n} = \mu_B \frac{m_e}{M_n} = 5.05078 \times 10^{-27} JT^{-1}$. Osserviamo che il valore del momento magnetico è abbattuto notevolmente dal rapporto $\frac{m_e}{M_n}$. Con g_n indichiamo il fattore giromagnetico nucleare e tale valore dipende dalla complicata struttura del nucleo (può andare da poche unità a qualche frazione dell'unità).

Si definisce *struttura iperfine* l'energia d'interazione tra il momento magnetico nucleare e il campo magnetico esterno $\mathbf{B}_J$ generato dal momento angolare totale muonico $\mathbf{J}$ ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$).

L'energia d'interazione di struttura iperfine si calcola mediante la relazione :

$$H_{HFS} = -\boldsymbol{\mu}_N \cdot \mathbf{B}_J = -\mu_N B_J \cos(\mu_N, B_J) = \mu_N B_J \cos(I, J) \quad (1.4)$$

con $\cos(\mu_N, B_J)$ l'angolo compreso tra $\boldsymbol{\mu}_N$ e $\mathbf{B}_J$ e uguale a $-\cos(I, J)$, in quanto $\boldsymbol{\mu}_N$ parallelo a $\mathbf{I}$ e $\mathbf{B}_J$ antiparallelo a $\mathbf{J}$.

Sapendo che $|\mathbf{I}| = \sqrt{I(I+1)}\hbar$ e sfruttando la relazione (1.3) si può calcolare il $|\boldsymbol{\mu}_N|$:

$$|\boldsymbol{\mu}_N| = g_n \mu_n \sqrt{I(I+1)}. \quad (1.5)$$

Lo spin nucleare e il momento angolare muonico si accoppiano creando il momento angolare totale $\mathbf{F}$ con $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$, di modulo : $|\mathbf{F}| = \sqrt{F(F+1)}\hbar^2$.

Il modulo quadro di $\mathbf{F}$ corrisponde a:

$$|\mathbf{F}|^2 = |\mathbf{I}|^2 + |\mathbf{J}|^2 + 2|\mathbf{I}||\mathbf{J}| \cos(I, J) \quad (1.6)$$

da cui si ricava :

$$\cos(I, J) = \frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2\sqrt{I(I+1)}\sqrt{J(J+1)}}. \quad (1.7)$$

Ora, l'energia d'interazione di struttura iperfine (1.4) può essere riscritta utilizzando i risultati ottenuti da (1.5) e da (1.7) :

$$\begin{aligned} H_{HFS} &= g_n \mu_n \sqrt{I(I+1)} B_J \frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2\sqrt{I(I+1)}\sqrt{J(J+1)}} \\ H_{HFS} &= g_n \mu_n B_J \frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2\sqrt{J(J+1)}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Nel caso in cui il muone si trovi in un orbitale s l'interazione di struttura iperfine è proporzionale semplicemente al prodotto scalare delle due quantità vettoriali coinvolte:

$$H_{HFS} = -C \boldsymbol{\mu}_N \cdot \boldsymbol{\mu}_\mu = C g_n g_s \mu_B^2 \frac{m_e}{M_n} \frac{\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}}{\hbar^2} \quad (1.9)$$

con g_s il fattore giromagnetico di spin del muone ($g_s \approx 2$).

Definendo ora la quantità $\xi_N = C g_n g_s \mu_B^2 \frac{m_e}{M_n}$ e conoscendo la forma della costante C si ricava l'ordine di grandezza dello *splitting* energetico:

$$\xi_N = g_n \frac{Z^3}{n^3} \frac{1.06 \mu\text{eV}}{M_n(\text{a.m.u})} \quad (1.10)$$

con $M_n(\text{a.m.u})$ la massa del protone espressa in unità di massa atomica [9].

L'ordine di grandezza di ξ_N è compreso tra qualche eV a piccole frazioni di eV. Per esempio, nel caso del ^{208}Pb ($Z = 82$), per un muone che si trova nello stato $1s$ ($n = 1$) lo *splitting* ξ_N è inferiore a 1 eV. Tale correzione è decisamente più piccola rispetto a quelle di polarizzazione nucleare (dell'ordine di qualche keV).

1.3 Ulteriori correzioni nel calcolo dell'energia di legame degli stati muonici

Molti effetti concorrono per determinare esattamente l'energia di legame degli stati muonici. Abbiamo appena visto che effetti di struttura iperfine svolgono un ruolo del tutto trascurabile. Però, è opportuno notare che gli effetti di polarizzazione nucleare, trattati nel nostro lavoro, non costituiscono la correzione principale nel calcolo di tale energia. Nonostante ciò è utile studiare

Capitolo 1. L'atomo muonico

Stato	a	b	c	d	e	f	g	h
$1s_{1/2}$	10592.399	67.249	0.553	-0.492	0.410	67.720	-3.814	0.385
$2s_{1/2}$	3600.013	19.412	0.149	-0.244	0.071	19.387	-0.792	0.111
$2p_{1/2}$	4814.776	32.470	0.251	-0.348	0.074	32.447	-0.650	0.120
$2p_{3/2}$	4630.089	29.919	0.229	-0.335	0.056	29.869	-0.911	0.106
$3p_{1/2}$	2139.335	10.810	0.082	-0.160	0.023	10.708	-0.226	0.082
$3p_{3/2}$	2091.890	10.277	0.077	-0.160	0.019	10.213	-0.301	0.080
$3d_{3/2}$	2173.037	10.563	0.075	-0.186	0.002	10.454	0.099	0.051
$3d_{5/2}$	2130.158	9.899	0.070	-0.180	0.001	9.791	-0.098	0.052

Tabella 1.1: Correzioni delle energie di legame negli stati muonici del ^{208}Pb (esprese in keV) tratte dalla referenza [5]. a: Energia di legame data una dimensione finita del nucleo e correzione VP al primo ordine; b: Correzione VP al primo ordine; c: Correzione VP al secondo ordine; d: Correzione VP all'ordine ≥ 3 ; e: Correzione VP muonica; f: Correzione VP totale; g: Correzioni di "Lamb shift"; h: Correzioni di *screening elettronico*.

nel dettaglio questo aspetto perché c'è ancora margine di miglioramento, soprattutto dal punto di vista teorico. La valutazione di questo effetto è nota per la sua complessità e imprecisione [5].

Come si può osservare dalla colonna a della tabella (1.1) il fattore dominante nel calcolo dell'energia di legame per un stato muonico è legato alla dimensione finita del nucleo. Operativamente tale fattore può essere calcolato attraverso le equazioni di Dirac introducendo una fissata distribuzione di carica nucleare.

Il secondo fattore da tenere in considerazione consiste nel fenomeno cosiddetto di "polarizzazione di vuoto" (VP). Tale effetto costituisce la correzione principale nell'elettrodinamica quantistica (QED): consiste nella produzione e annichilazione di stati accoppiati virtuali e^+e^- . Questo fatto implica una modificazione della legge di Coulomb a breve distanza. Numericamente tale effetto è così importante che non può essere trattato come una semplice perturbazione; operativamente al potenziale elettromagnetico usuale va aggiunto un termine correttivo definito "potenziale di Uehling". Esiste, inoltre, una correzione VP legata alla formazione e annichilazione di stati accoppiati virtuali $\mu^+\mu^-$ e si calcola seguendo la stessa procedura del caso delle coppie e^+e^- . Data una massa muonica decisamente maggiore rispetto a quella elettronica, le correzioni VP dovute all'accoppiamento di $\mu^+\mu^-$ sono molto più piccole rispetto a quelle dovute alle coppie positrone-elettrone; pertanto, possono essere decisamente trascurate [7].

Terzo fattore a determinare con accuratezza il valore dell'energia di legame degli stati muonici, sebbene di importanza decisamente inferiore, è l'effetto di "Lamb shift" [5]. Questo fenomeno consiste in uno *splitting* tra orbitali muonici (o elettronici) con stesso valore di n (numero quantico principale) e j (momento angolare totale), ma diverso l (numero quantico azimutale) [9].

Infine piccolissime correzioni sull'energia sono fornite da un'interazione muone-elettrone (*screening elettronico*). Tale effetto può essere calcolato introducendo un valore di carica nucleare effettiva.

Nella tabella [1.1] riportiamo i valori tabulati di tutte queste correzioni per le energie di legame degli stati muonici nel ^{208}Pb (in keV) [5].

1.4 Spettroscopia dell'atomo muonico

Come descritto nella sezione (1.1) la transizione del muone dallo stato $2p$ allo stato $1s$ è accompagnata da un'emissione di raggi X molto intensi. L'osservazione di questi raggi fu la prima prova sperimentale della formazione degli atomi muonici. Sebbene le prime osservazioni fossero effettuate utilizzando i muoni dei raggi cosmici, solamente la disponibilità in laboratorio di intensi fasci di muoni consentì di raggiungere un'alta precisione sperimentale sulle misure [5, 10].

Le misurazioni delle energie di transizioni degli stati muonici furono un campo di ricerca estremamente attivo dagli anni Cinquanta fino agli anni Ottanta presso grandi laboratori. Successivamente, nonostante l'attenzione si sia spostata verso altri interessi quali le collisioni ad alta energia, in campo sperimentale misurazioni di questo tipo vengono tutt'ora eseguite con tecniche sempre più raffinate (ad esempio al Paul Scherrer Institute PSI). Le prime misure furono effettuate usando scintillatori; successivamente, con l'avvento di rivelatori al germanio ci fu un significativo miglioramento dell'accuratezza e della precisione di rivelazione degli spettri energetici muonici consentendo, a sua volta, un notevole avanzamento nella comprensione dell'atomo muonico e dei relativi effetti nucleari. In questo modo si riuscì a misurare i raggi X muonici di quasi tutti gli elementi stabili, ad esclusione dei nuclei più leggeri e di poche altre eccezioni.

Di seguito vogliamo fornire una descrizione sintetica dell'apparato sperimentale con cui furono calcolate le energie di transizione negli atomi muonici al SIN (Swiss Institute for Nuclear Physics) nel 1988 [5].

Un fascio di muoni μ^- veniva fatto passare attraverso quattro scintillatori, dove a metà percorso era posizionato il bersaglio desiderato (ad esempio il ^{208}Pb). I muoni che possedevano un'energia specifica potevano venire intrappolati nei singoli atomi e procedere nella loro "cascata" verso le *shells* più

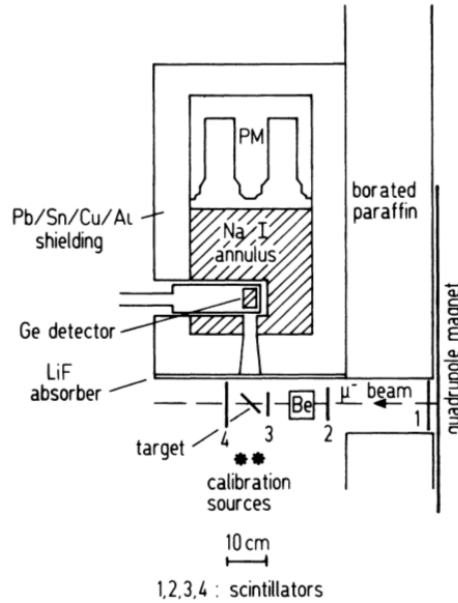


Figura 1.3: Apparato sperimentale per la rilevazione delle transizioni muoniche

interne. Le energie di transizione caratteristiche dei muoni erano individuate da rivelatori al germanio che mostravano uno spettro con dei picchi ad andamento gaussiano. Per aumentare la risoluzione del sistema (ossia diminuire l'ampiezza della metà del picco (FWHM)) il rivelatore al germanio veniva circondato da NaI in modo asimmetrico a sua volta protetto da uno strato di Pb/Sn/Cu/Al. Per ridurre il flusso di neutroni dovuti alla cattura muonica del nucleo si poneva uno strato di LiF nella direzione del fascio. Infine per eliminare dei rumori di fondo si ripeteva lo stesso esperimento sostituendo al bersaglio analizzato un campione di berillio.

Uno schema dell'apparato sperimentale è suggerito nella figura (1.3).

I dati sperimentali sulle energie di transizione vennero utilizzati per estrarre importanti informazioni sulla distribuzione di carica nucleare e sugli effetti di polarizzazione nucleare e poterono essere confrontati con i valori teorici.

Intorno agli anni Duemila venne introdotta una nuova tecnica che si basava sulla spettroscopia laser che permetteva la misura delle transizioni energetiche anche in atomi muonici leggeri. Al PSI con tale tecnica si riuscì a misurare con grande accuratezza lo *shift* energetico della transizione $2p - 2s$ e lo *splitting* iperfine dello stato $2s$ nell'idrogeno muonico [11, 12]. Da tale risultato si calcolò il valore del raggio del protone con grande precisione data la la maggior sensibilità dell'atomo muonico agli effetti nucleari [13]. Vennero inoltre effettuate misurazioni sia sul tempo di diseccitazione dello stato $2s$

sia del *Lamb shift* nell'idrogeno muonico [14, 15].

1.5 Struttura nucleare

In questa sezione vogliamo descrivere alcuni elementi di base di struttura nucleare utile per la comprensione degli argomenti successivi.

La fisica della struttura nucleare si occupa dello studio delle proprietà del nucleo, quale l'interazione tra nucleoni, l'energia di legame, delle proprietà di stato fondamentale (raggi, deformazioni, momenti elettromagnetici), dello studio degli stati eccitati nucleari e della spettroscopia dei livelli eccitati. Il momento angolare totale J e la parità π (J^π) sono dei buoni numeri quantici dell'Hamiltoniana nucleare. Una comprensione esaustiva del *pattern* degli stati nucleari eccitati è in generale un compito difficile. Molti effetti contribuiscono a determinare questi stati eccitati: per esempio, la forma del nucleo (sferica o deformata), effetti di *shell* (sistemi a *shell* chiusa o aperta) ed effetti di *pairing* (interazione di appaiamento).

Se ci restringiamo al caso dei nuclei trattati nel nostro lavoro (nuclei pari-pari) osserviamo che il loro *ground state* è corrispondente allo stato 0^+ , ossia $J = 0$ e parità positiva. Invece il primo stato 2^+ costituisce, di norma, il primo stato eccitato. Il ^{208}Pb rappresenta un'eccezione perché il suo primo stato eccitato è corrispondente allo stato 3^- [5]. Studiando i valori delle energie degli stati eccitati più bassi siamo in grado di conoscere la forma nucleare (sferica o deformata). E' significativo calcolare il rapporto R

$$R = \frac{E(4_1^+)}{E(2_1^+)} \quad (1.11)$$

con $E(4_1^+)$ l'energia del primo stato eccitato 4^+ e $E(2_1^+)$ l'energia del primo stato eccitato 2^+ . Tale rapporto si aggira solitamente attorno ai valori caratteristici di 2 o 3.33. Si può notare, nella maggioranza dei casi, che i nuclei ai quali è associato $R = 2$ hanno un valore o di Z (numero di protoni) o di N (numero di neutroni) uguale a un numero magico. Questi nuclei hanno una forma sferica, sono soggetti a moti vibrazionali, ma non possono ruotare. Un esempio di nucleo sferico è il ^{208}Pb , in cui sia Z ($Z = 82$) che N ($N = 126$) sono due numeri magici. Invece, quei nuclei che hanno sia Z che N diverso da un numero magico sono caratterizzati da $R \simeq 3.33$. Questi nuclei hanno una forma deformata, non sono invarianti per rotazione e ammettono uno spettro rotazionale [16].

Un concetto largamente utilizzato nel nostro lavoro è quello di distribuzione di carica nucleare. Sia dato un stato nucleare $|x_{JM}\rangle$ a cui è associata una funzione d'onda nucleare $\Psi_{JM}(\mathbf{r}, \sigma)$; la distribuzione di massa nucleare

dello stato $|x\rangle$ è data dal modulo quadro della corrispettiva funzione d'onda. Si definisce, invece, $\delta\rho_{JM}(\mathbf{r}, \sigma) = \Psi_{J'M'}^{*(f)}(\mathbf{r}, \sigma)\Psi_{JM}^{(i)}(\mathbf{r}, \sigma)$ il termine di densità di transizione: è associato alla variazione della densità di carica tra lo stato iniziale $|i\rangle$ e lo stato finale $|f\rangle$. Fenomenologicamente si osserva che i primi stati nucleari eccitati mantengono “congelata” la parte di spin, cioè sono eccitazioni in cui varia la forma e non lo spin, cosicché la densità di transizione può essere semplificata: $\delta\rho_{JM}(\mathbf{r}, \sigma) = \delta\rho_{LM}(\mathbf{r})$.

Introduciamo, ora, alcuni strumenti generali molto utili per lo studio degli effetti di polarizzazione nucleare. Se allo stato fondamentale del nucleo $|0\rangle$ viene applicato un campo esterno $\hat{F}$, la probabilità $P_{0,n}$ di ottenere uno stato finale eccitato $|n\rangle$ è data da

$$P_{0,n} = \left(\frac{1}{\sum_n |\langle n|\hat{F}|0\rangle|^2} \right) |\langle n|\hat{F}|0\rangle|^2. \quad (1.12)$$

Introduciamo la cosiddetta *strength function* associata all'operatore $\hat{F}$ nel seguente modo:

$$S(E) = \sum_n |\langle n|\hat{F}|0\rangle|^2 \delta(E - E_n) \quad (1.13)$$

dove si somma su tutti i possibili stati eccitati dall'operatore $\hat{F}$ e indichiamo con E_n l'energia di eccitazione dello stato $|n\rangle$. Uno stato eccitato è dominante se il suo contributo sulla *strength function* costituisce una grande frazione della somma totale. Nel caso di polarizzazione nucleare l'operatore $\hat{F}$ è rappresentato dal potenziale d'interazione Coulombiana muone-nucleo.

Uno strumento utile per calcolare la risposta lineare di nuclei sferici data una perturbazione di tipo $\hat{F}$ è la Random Phase Approximation (RPA) [4]. Tale metodo può essere implementato computazionalmente e oggi costituisce uno strumento fondamentale per lo studio degli stati nucleari eccitati. La RPA si fonda su una teoria di campo medio autoconsistente di Hartree - Fock (HF) in cui si considera un'interazione nucleare effettiva (ad esempio l'interazione di Skyrme). Unico *input* richiesto dalla teoria HF è la conoscenza dell'interazione efficace. A differenza dell'interazione elettromagnetica, di cui si ha una conoscenza esaustiva e si conosce la sua espressione analitica, quella tra nucleone - nucleone è molto più complicata, meno nota, e tutt'oggi è oggetto di studio. Una delle interazioni di maggior successo che meglio descrive quella tra due nucleoni è l'interazione di Skyrme, proposta negli anni Cinquanta. Nei decenni successivi i parametri di questa interazione sono stati modificati e migliorati. L'interazione di Skyrme è una forza a raggio nullo, dipendente dalla densità dei nucleoni nel nucleo e dal momento relativo di due nucleoni interagenti, ed è largamente usata perché semplifica i calcoli essendo proporzionale a delle delta di Dirac [17].

Nel caso preso in esame il metodo RPA è stato già implementato computazionalmente con un'opportuna interazione di Skyrme. Il nostro lavoro è stato quello di modificare il codice introducendo come operatore di perturbazione $\hat{F}$ quello corrispondente al potenziale d'interazione muone-nucleo e di riprodurre in modo autonomo i valori degli *shifts* energetici. Nel caso analizzato in dettaglio (lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb) il potenziale inserito assume una forma parametrica opportunamente calcolata.

Il calcolo RPA, nello specifico, permette di poter ottenere come *output* non solo gli autovalori delle energie degli stati nucleari eccitati, ma anche le corrispondenti ampiezze di transizione $|\langle n|\hat{F}|0\rangle|$. Tali ingredienti sono indispensabili per il calcolo degli *shifts* energetici, come mostrato nel seguente capitolo.

Capitolo 2

Calcolo degli *shifts* energetici

2.1 L'Hamiltoniana del sistema

L'Hamiltoniana del sistema considerato è:

$$\mathcal{H} = H_\mu + H_N + V \quad (2.1)$$

indicando con H_μ l'Hamiltoniana del muone, composta da un termine di energia cinetica, con H_N l'Hamiltoniana nucleare, composta anch'essa da un termine cinetico e da uno potenziale e V il potenziale d'interazione Coulombiano muone-nucleo [18].

L'Hamiltoniana $\mathcal{H}$ è scritta in forma del tutto generale e tiene in considerazione che sia gli stati muonici che gli stati nucleari possano essere perturbati da un potenziale d'interazione.

Nel nostro caso, supponiamo di conoscere le funzioni d'onda degli stati nucleari corrispondenti agli stati imperturbati e di sostituire quindi all'Hamiltoniana del problema $\mathcal{H}$, del tutto generale, un'Hamiltoniana efficace $\mathcal{H}^{eff}$:

$$\mathcal{H}^{eff} = T_\mu + V = T_\mu + V_0 + (V - V_0) \quad (2.2)$$

dove T_μ è il termine corrispondente all'energia cinetica del muone, V il potenziale d'interazione muone nucleo così definito:

$$V(\mathbf{r}) = -\alpha\hbar c \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.3)$$

con $\rho(\mathbf{r}')$ l'operatore di densità di protoni, c la velocità della luce e α la costante di struttura fine ($\alpha = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.038}$).

Si tenga presente che $\int d^3r' \rho(\mathbf{r}') = Z$.

Infine definiamo V_0 come :

$$V_0 \equiv \langle a|V|a \rangle \quad (2.4)$$

indicando con $|a\rangle$ lo stato fondamentale nucleare e lo stato muonico preso in considerazione [19].

V_R rappresenta il potenziale d'interazione residua muone-nucleo, responsabile degli *shifts* dei livelli nucleari e muonici: $V_R = V - V_0$; tale fenomeno prende il nome di correzione di polarizzazione nucleare.

Osserviamo che gli stati dell'Hamiltoniana H_0 possono essere scritti come prodotto tra stati nucleari e stati muonici:

$$|x\rangle \equiv |x_{JM}\rangle \otimes |x_\mu\rangle \quad (2.5)$$

dove $|x\rangle$ è lo stato accoppiato muone-nucleo, $|x_{JM}\rangle$ è lo stato nucleare e $|x_\mu\rangle$ è lo stato muonico.

Pertanto la funzione d'onda associata a tale stato $|x\rangle$ risulta:

$$\Psi^{(x)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \sigma, \sigma') = \Psi_{JM}^{(x)}(\mathbf{r}', \sigma') \Psi_\mu^{(x)}(\mathbf{r}, \sigma) \quad (2.6)$$

dove $\Psi_{JM}^{(x)}(\mathbf{r}', \sigma')$ è la funzione d'onda nucleare e $\Psi_\mu^{(x)}(\mathbf{r}, \sigma)$ è la funzione d'onda muonica. Abbiamo chiamato con $\mathbf{r}'$ il set di coordinate $\{\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_A\}$ con $\mathbf{r}'_i$ la coordinata della i -esima particella.

2.2 Calcolo analitico della correzione dell'energia

Al primo ordine lo *shift* dello stato $|a\rangle$ è nullo per definizione di V_0 (2.4) ¹ :

$$\Delta E_0^{(1)} = \langle a|V_R|a \rangle = 0 \quad (2.7)$$

Al secondo ordine, invece, lo *shift* dell' a -esimo stato accoppiato è dato da:

$$\Delta E_a = \sum_{b \neq a} \frac{|\langle b|V_R|a \rangle|^2}{E_N^{(a)} - E_N^{(b)}} \quad (2.8)$$

dove $|a\rangle$ è lo stato muonico preso in considerazione, accoppiato con il *ground state* del nucleo e gli stati $|b\rangle$ rappresentano l'intero spettro del muone e degli stati nucleari eccitati. Chiamiamo $E_N^{(a)}$ l'energia nucleare nello stato $|a\rangle$ e $E_N^{(b)}$ l'energia nucleare nello stato $|b\rangle$.

¹ $V_R = V - V_0$, allora $\Delta E_0^{(1)} = \langle a|V_R|a \rangle = \langle a|V|a \rangle - V_0 = V_0 - V_0 = 0$.

Capitolo 2. Calcolo degli *shifts* energetici

Come ulteriore ipotesi, supponiamo che gli stati muonici non vengano eccitati, allora le funzioni d'onda associate agli stati $|a\rangle$ e $|b\rangle$ sono rispettivamente:

$$\Psi^{(a)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \sigma, \sigma') = \Psi_{JM}^{(a)}(\mathbf{r}', \sigma') \psi_{\mu}^{(a)}(\mathbf{r}) \chi_{\mu}^{(a)}(\sigma) \quad (2.9)$$

$$\Psi^{(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \sigma, \sigma') = \Psi_{J'M'}^{(b)}(\mathbf{r}', \sigma') \psi_{\mu}^{(a)}(\mathbf{r}) \chi_{\mu}^{(a)}(\sigma). \quad (2.10)$$

Per i successivi calcoli è utile espandere in serie il rapporto $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \quad (2.11)$$

con $r_{<}$ il valore più piccolo tra r e r' , $r_{>}$ il valore più grande tra r e r' , Y_{lm} la funzione armonica sferica e tenere in considerazione che

$$Y_{00}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \quad (2.12)$$

Possiamo ora calcolare gli elementi di matrice:

$$\begin{aligned} \langle b|V_R|a\rangle &= -\alpha\hbar c \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \int d^3r d^3r' d\sigma d\sigma' \Psi^{*(b)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \sigma, \sigma') \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \Psi^{(a)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \sigma, \sigma') \\ &= -\alpha\hbar c \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \int d^3r' d\sigma' \Psi_{J'M'}^{*(b)}(\mathbf{r}', \sigma') \Psi_{JM}^{(a)}(\mathbf{r}', \sigma') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \int d^3r |\psi_{\mu}^{(a)}(\mathbf{r})|^2 \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove in quest'ultima relazione abbiamo tenuto in considerazione il seguente integrale:

$$\int d\sigma |\chi_{\mu}^{(a)}(\sigma)|^2 = 1 \quad (2.14)$$

Tale integrale è pari a 1 per motivi di normalizzazione.

Fenomenologicamente si osserva che i primi stati nucleari eccitati mantengono “congelata” la parte di spin, pertanto il primo integrale dell'equazione (2.13) dipende esclusivamente da coordinate di tipo spaziale ($\mathbf{r}'$), allora può essere così riscritta:

$$\langle b|V_R|a\rangle = -\alpha\hbar c \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \int d^3r' \psi_{J'M'}^{*(b)}(\mathbf{r}') \psi_{JM}^{(a)}(\mathbf{r}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \int d^3r |\psi_{\mu}^{(a)}(\mathbf{r})|^2 \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) = (*) \quad (2.15)$$

Se vogliamo trattare lo stato muonico $1s$, allora la funzione d'onda $\psi_{\mu}^{(1s)}(\mathbf{r})$ è a simmetria sferica, pertanto possiamo scrivere :

$$(*) = -\alpha\hbar c \sum_{lm} \frac{(4\pi)^{3/2}}{2l+1} \int d^3r' \psi_{J'M'}^{*(b)}(\mathbf{r}') \psi_{JM}^{(a)}(\mathbf{r}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \int dr r^2 |\psi_{\mu}(r)|^2 \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \int d\hat{\mathbf{r}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

Capitolo 2. Calcolo degli *shifts* energetici

dove abbiamo moltiplicato e diviso per $\sqrt{4\pi}$.

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}
 (*) &= -\alpha\hbar c \sum_{lm} \frac{(4\pi)^{3/2}}{2l+1} \int d^3r' \psi_{J'M'}^{*(b)}(\mathbf{r}') \psi_{JM}^{(a)}(\mathbf{r}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \int dr r^2 |\psi_\mu(r)|^2 \frac{r^l}{r_{>^{l+1}}} \delta_{l,0} \delta_{m,0} \\
 &= -\alpha\hbar c (4\pi)^{3/2} \int d^3r' \psi_{J'M'}^{*(b)}(\mathbf{r}') \psi_{JM}^{(a)}(\mathbf{r}') \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int dr r^2 |\psi_\mu(r)|^2 \frac{1}{r_{>}}.
 \end{aligned}$$

Allora:

$$\langle b|V_R|a \rangle = -\alpha\hbar c 4\pi \int d^3r' \psi_{J'M'}^{*(b)}(\mathbf{r}') \psi_{JM}^{(a)}(\mathbf{r}') \int dr r^2 |\psi_\mu(r)|^2 \frac{1}{r_{>}}. \quad (2.16)$$

Il secondo integrale corrisponde al potenziale generato dal muone definito come ϕ :

$$\phi = \int dr r^2 |\psi_\mu(r)|^2 \frac{1}{r_{>}}. \quad (2.17)$$

Come mostrato negli articoli di [20, 21] il potenziale muonico ϕ può essere parametrizzato in modo soddisfacente (nel caso in cui si trovi in un orbitale di tipo s) nella seguente forma:

$$\phi(r') = A + Br'^k \quad (2.18)$$

dove A , B e k sono dei parametri numerici.

In appendice (A) sono mostrati i calcoli dettagliati per ricavare tale parametrizzazione e inoltre viene fornito un metodo analitico per il calcolo del parametro k . Dopo aver sostituito l'espressione (2.18) in (2.16) possiamo riscrivere l'equazione (2.8) in termini delle sole funzioni d'onda nucleari:

$$\Delta E_a = \alpha^2 (\hbar c 4\pi)^2 \sum_{b \neq a} \frac{|\int d^3r' \psi_{J'M'}^{*(b)}(\mathbf{r}') \psi_{JM}^{(a)}(\mathbf{r}') (A + Br'^k)|^2}{E_N^{(a)} - E_N^{(b)}} \quad (2.19)$$

Il termine costante A non contribuisce nell'espressione (2.19) per ragioni di ortonormalità, cosicché possiamo scrivere l'espressione finale [3]:

$$\Delta E_a = \alpha^2 B^2 (\hbar c 4\pi)^2 \sum_{b \neq a} \frac{|\int d^3r' \psi_{J'M'}^{*(b)}(\mathbf{r}') \psi_{JM}^{(a)}(\mathbf{r}') r'^k|^2}{E_N^{(a)} - E_N^{(b)}}. \quad (2.20)$$

Come ultima osservazione, è utile notare che siamo riusciti a esprimere lo *shift* energetico dello stato muonico $1s_{1/2}$ attraverso parametri numerici e

funzioni d'onda esclusivamente nucleari. Identifichiamo ora con $|a_{JM}\rangle$ solamente lo stato nucleare iniziale (*ground state*) e con $|b_{J'M'}\rangle$ lo stato nucleare eccitato, allora l'equazione (2.20) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\Delta E_a = \alpha^2 (4\pi\hbar c)^2 B^2 \sum_{b \neq a} \frac{|\langle b_{J'M'} | r'^k | a_{JM} \rangle|^2}{E_N^{(a)} - E_N^{(b)}}. \quad (2.21)$$

Tale espressione sarà utile per la comprensione degli argomenti trattati di seguito.

2.3 Calcolo del parametro B

Per calcolare la forma analitica e il valore esplicito di B per il caso dello stato muonico $1s$ nel ^{208}Pb seguiamo la procedura descritta nella referenza [10].

Ricordiamo che nella nostra convenzione la distribuzione di carica nucleare è definita in modo tale che valga la seguente equazione:

$$\int \rho(\mathbf{r}') d^3r' = Z.$$

Supponiamo ora che la densità di carica nucleare dello stato imperturbato sia ρ_0 e che sia a simmetria sferica, possiamo, quindi, scrivere la seguente relazione:

$$\int \rho_0(\mathbf{r}') d^3r' = 4\pi \int \rho_0(r') r'^2 dr' = Z.$$

Lo *shift* energetico dello stato muonico produce un cambiamento della densità di carica nucleare da ρ_0 a ρ , non comportando, comunque, una grande modifica della forma della distribuzione di carica iniziale.

Risolvendo analiticamente l'equazione di Dirac per due distribuzioni di carica nucleare a simmetria sferica si ottiene che lo *shift* energetico dello stato muonico può essere calcolato come segue:

$$\Delta E_a = 4\pi e \int \Delta\rho(r') \phi(r') r'^2 dr' \quad (2.22)$$

con $\Delta\rho(r') = \rho(r') - \rho_0(r')$ e $\phi(r')$ il potenziale muonico definito nell'equazione (2.17). Esplicitando $\phi(r')$ con la parametrizzazione (2.18) si ottiene:

$$\Delta E_a = 4\pi e \int \Delta\rho(r') (A + B r'^k) r'^2 dr' = 4\pi e B \int (\rho(r') - \rho_0(r')) r'^{k+2} dr'. \quad (2.23)$$

Capitolo 2. Calcolo degli *shifts* energetici

E' ora necessario introdurre la definizione di momento $\langle r'^k \rangle$ per un generico k [10]:

$$\langle r'^k \rangle = \frac{4\pi}{Z} \int \rho(r') r'^{k+2} dr' \quad (2.24)$$

e conseguentemente

$$\langle r'^k \rangle_0 = \frac{4\pi}{Z} \int \rho_0(r') r'^{k+2} dr'. \quad (2.25)$$

Le definizioni (2.24) e (2.25) possono essere quindi inserite nell'equazione (2.23) ottenendo:

$$\Delta E_a = ZeB[\langle r'^k \rangle - \langle r'^k \rangle_0]. \quad (2.26)$$

Sostituiamo il valore del momento $\langle r'^k \rangle$ con un raggio equivalente R_k mediante la definizione introdotta da K. W. Ford e J. G. Wills [22]:

$$\langle r'^k \rangle = \frac{4\pi}{Z} \int_0^{R_k} \rho(r') r'^{k+2} dr' = \frac{4\pi}{Z} \frac{Z}{\frac{4}{3}\pi R_k^3} \frac{R_k^{k+3}}{k+3} = \frac{3R_k^k}{k+3}. \quad (2.27)$$

Essi, attraverso un'analisi numerica dove furono utilizzate diverse distribuzioni nucleari possibili, osservarono una relazione lineare tra lo *shift* energetico dello stato $|a\rangle$ e i corrispettivi raggi equivalenti [22, 23]:

$$\Delta R_k = -C_z \Delta E_a \quad (2.28)$$

dove ΔE_a corrisponde alla misura dello *shift* d'energia dello stato muonico e ΔR_k è la variazione di raggio equivalente (ossia la differenza tra raggio equivalente in presenza e in assenza di perturbazione). C_z è un parametro numerico che rappresenta il coefficiente di proporzionalità tra lo *shift* energetico e la variazione di raggio equivalente.

Utilizzando quest'ultima espressione e la numero (2.26) posso ricavare il valore del parametro C_z :

$$C_z = -\frac{\Delta R_k}{ZeB[\langle r'^k \rangle - \langle r'^k \rangle_0]} = -\frac{\Delta R_k}{ZeB\left[\frac{3R_k^k}{k+3} - \frac{3R_{k(0)}^k}{k+3}\right]} = -\frac{(k+3)(R_k - R_{k(0)})}{3ZeB(R_k^k - R_{k(0)}^k)}. \quad (2.29)$$

Sviluppiamo ora in serie di Taylor il termine R_k^k e ci arrestiamo al primo ordine:

$$R_k^k \simeq R_{k(0)}^k + kR_k^{k-1}(R_k - R_{k(0)}). \quad (2.30)$$

Tale risultato può essere inserito nell'equazione (2.29) ottenendo:

$$C_z = -\frac{k+3}{3kZeBR_k^{k-1}}. \quad (2.31)$$

Capitolo 2. Calcolo degli *shifts* energetici

Invertendo quest'equazione si ottiene agevolmente la formula per B :

$$B = -\frac{k+3}{3kZeC_zR_k^{k-1}}. \quad (2.32)$$

Il calcolo esplicito del parametro numerico B può essere ottenuto inserendo i dati numerici tabulati nell'articolo [10] e riportati nella tabella (2.1):

Stato muonico	k	$C_z(fm/MeV)$	Z
$1s_{1/2}$	0.99	1.29	82

Tabella 2.1: Valori di k , C_z e Z nel ^{208}Pb [10].

Per calcolare il valore di e ricordiamo la definizione della costante di struttura fine α ($\alpha = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.038}$). Allora

$$e = \sqrt{\frac{\hbar c}{137.038}} = \sqrt{\frac{197.33 \text{ MeV fm}}{137.038}} \approx 1.2 \text{ (MeV fm)}^{1/2}. \quad (2.33)$$

Unica incognita rimasta ora da calcolare è il valore di R_k^{k-1} . Notiamo, però, che se approssimiamo $k \simeq 1$ non è necessario la conoscenza del raggio equivalente. Abbiamo ora tutti i dati per calcolare il valore di B nello stato muonico $1s_{1/2}$ nel ^{208}Pb :

$$B = -\frac{1+3}{3 \cdot 1 \cdot 82 \cdot 1.2 \cdot 1.29} = -0.0105 \frac{\text{MeV}^{1/2}}{\text{fm}^{3/2}}. \quad (2.34)$$

Capitolo 3

Risultati numerici

3.1 Calcolo esplicito dello *shift* energetico dello stato muonico $1s_{1/2}$ nel ^{208}Pb mediante metodo EWSR

Un utile metodo per calcolare esplicitamente lo *shift* energetico di un dato stato muonico per effetto della polarizzazione nucleare è sfruttare la ben nota regola di somma pesata sull'energia (EWSR) [3].

E' utile ricordare il risultato finale a cui siamo giunti nell'espressione (2.21). Moltiplicando e dividendo per $E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$, si ottiene:

$$\Delta E_a = \alpha^2 (4\pi\hbar c)^2 B^2 \sum_{b \neq a} \frac{|\langle b_{J'M'} | r'^k | a_{JM} \rangle|^2}{E_N^{(a)} - E_N^{(b)}} \frac{E_N^{(b)} - E_N^{(a)}}{E_N^{(b)} - E_N^{(a)}}. \quad (3.1)$$

Chiamo per comodità $M_{ab} = |\langle b_{J'M'} | r'^k | a_{JM} \rangle|^2 (E_N^{(b)} - E_N^{(a)})$, allora:

$$\Delta E_a = -\alpha^2 (4\pi\hbar c)^2 B^2 \sum_{b \neq a} \frac{M_{ab}}{(E_N^{(b)} - E_N^{(a)})^2}. \quad (3.2)$$

La sommatoria $\sum_{b \neq a} M_{ab}$ costituisce la ben nota regola di somma pesata sull'energia (EWSR) e vale:

$$\sum_{b \neq a} M_{ab} = \frac{k^2 Z}{2M} \langle r'^{2k-2} \rangle \quad (3.3)$$

con M la massa del protone, k il valore del parametro numerico utilizzato nell'equazione (2.18).

Supponiamo ora di spezzare i termini della sommatoria (3.2) nell'usuale modo in una frazione Z/A isoscalare ($\tau = 0$) e in una frazione N/A isovettore ($\tau = 1$). Supponiamo anche che gli unici elementi di matrice apprezzabili siano quelli con energia vicino al valor medio $\langle E_N^{(b)} - E_N^{(a)} \rangle$, cosicch  tale fattore possa uscire dalla sommatoria. L'espressione finale che si ottiene   la seguente:

$$\Delta E_a = -\frac{\alpha^2(4\pi\hbar c)^2 B^2 k^2 Z}{2M} \langle r'^{2k-2} \rangle \left[\frac{Z}{A} \langle E_N^{(b)} - E_N^{(a)} \rangle_{\tau=0}^{-2} + \frac{N}{A} \langle E_N^{(b)} - E_N^{(a)} \rangle_{\tau=1}^{-2} \right]. \quad (3.4)$$

Per calcolare il valore dello *shift* energetico nello stato $1s_{1/2}$ nel ^{208}Pb utilizziamo i dati brevemente riassunti nella tabella (3.1) (i valori di $\langle E_N^{(b)} - E_N^{(a)} \rangle_{\tau=0}$ e $\langle E_N^{(b)} - E_N^{(a)} \rangle_{\tau=1}$ sono tratti dalla referenza [3], il valore di k dalla referenza [10] (coerentemente con quanto detto nel capitolo precedente), mentre il valore di B   quello calcolato in (2.34) :

M	Z	N	A	k	$\langle E_N^{(b)} - E_N^{(a)} \rangle_{\tau=0}$	$\langle E_N^{(b)} - E_N^{(a)} \rangle_{\tau=1}$	$B(\frac{\text{MeV}^{1/2}}{\text{fm}^{3/2}})$
938.27	82	126	208	1	14	28	-0.0105

Tabella 3.1: Dati per lo stato $1s_{1/2}$ nel ^{208}Pb . I valori di M , $\langle E_N^{(b)} - E_N^{(a)} \rangle_{\tau=0}$ e $\langle E_N^{(b)} - E_N^{(a)} \rangle_{\tau=1}$ sono forniti in MeV [3, 10].

Affinch  il termine ΔE_a possa essere misurato in MeV, l'unit  di misura della prima frazione deve essere in MeV^3 . E' necessario , quindi, convertire B in MeV/fm :

$$B = -0.0105 \frac{\text{MeV}^{1/2}}{\text{fm}^{3/2}} \cdot (197.33)^{1/2} (\text{MeV fm})^{1/2} = -0.147 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}}$$

allora la prima frazione diventa:

$$\frac{\alpha^2(4\pi\hbar c)^2 B^2 k^2 Z}{2M} = \frac{(1/137.038)^2 (4\pi \cdot 197.33)^2 (\text{MeV fm})^2 (-0.147 \text{MeV}/\text{fm})^2 \cdot 82}{2 \cdot 938.27 \text{ MeV}} = 0.309 \text{ MeV}^3.$$

In conclusione posso calcolare il valore di ΔE_a :

$$\Delta E_a = 0.309 \text{ MeV}^3 \left[\frac{82}{208} \frac{1}{14^2 \text{ MeV}^2} + \frac{126}{208} \frac{1}{28^2 \text{ MeV}^2} \right] = 0.860 \text{ keV}. \quad (3.5)$$

E' da notare che in quest'ultima espressione abbiamo espresso lo *shift* energetico con segno positivo, indicando un incremento dell'energia di legame dello stato muonico analizzato.

Questo risultato   in buon accordo con il valore riportato nell'articolo [3]: $\Delta E_a \approx 0.75 \text{ keV}$.

3.2 Calcolo esplicito dello *shift* energetico dello stato muonico $1s_{1/2}$ nel ^{208}Pb mediante RPA

Per procedere al calcolo esplicito dello *shift* energetico dello stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb mediante RPA è utile ricordare il risultato a cui siamo giunti nell'equazione (2.21).

Innanzitutto è opportuno risolvere il coefficiente dell'equazione appena citata sfruttando il valore di B calcolato mediante l'equazione (2.32):

$$\begin{aligned} \alpha^2(4\pi\hbar c)^2 B^2 &= e^4(4\pi)^2 B^2 = \\ &= 1.44^2 (\text{MeV fm})^2 \cdot (4\pi)^2 \cdot (-0.0105)^2 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3} = 0.0361 \frac{\text{MeV}^3}{\text{fm}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Affinché si possa esprimere il risultato dello *splitting* energetico ΔE_a in MeV dobbiamo convertire il valore della costante appena calcolata in $\frac{\text{MeV}^2}{\text{fm}^2}$:

$$e^4(4\pi)^2 B^2 = 0.0361 \frac{\text{MeV}^3}{\text{fm}} = \frac{0.0361 (\text{MeV}^3/\text{fm})}{197.33 \text{ MeV fm}} = 1.829 \cdot 10^{-4} \frac{\text{MeV}^2}{\text{fm}^2}. \quad (3.7)$$

Per comprendere meglio la procedura operativa utilizzata è utile citare il teorema di Wigner-Eckart [24]: dato un operatore perturbativo $\hat{F}_{jm}$ è valida la seguente equazione:

$$|\langle b_{J'M'} | F_{jm} | a_{JM} \rangle|^2 = \frac{1}{2J+1} |\langle JMjm | J'M' \rangle|^2 |\langle b_{J'M'} | \hat{F}_j | a_{JM} \rangle|^2 \quad (3.8)$$

dove i fattori del tipo $\langle JMjm | J'M' \rangle$ vengono chiamati coefficienti di Clebsch–Gordan e i termini $\langle b_{J'M'} | \hat{F}_j | a_{JM} \rangle$ vengono chiamati elementi di matrice ridotta.

Nel nostro caso all'operatore $\hat{F}_{jm}$ va sostituito il termine r'^k e nel caso specifico dello stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb , k è uguale a 1 [10]; lo stato $|a_{JM}\rangle$ corrisponde allo stato di *ground state* e lo stato $|b_{J'M'}\rangle$ è lo stato eccitato preso in esame. Con tale notazione si deduce che $J = 0$ e $M = 0$; pertanto, sia il rapporto $\frac{1}{2J+1}$ che i coefficienti di Clebsch–Gordan sono pari a 1. E' immediato osservare, che in questo specifico caso, gli elementi $|\langle b_{J'M'} | \hat{F}_j | a_{JM} \rangle|^2$ e $|\langle b_{J'M'} | F_{jm} | a_{JM} \rangle|^2$ coincidono.

Per la precisione, il codice RPA utilizzato in questo elaborato [4] richiede come input il valore di A , di Z , un tipo specifico di interazione di Skyrme e lo stato nucleare eccitato che si vuole studiare. Come output fornisce i valori delle energie di eccitazione $E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$, un file con le densità di transizione

$\delta\rho_{JM}(r')$ calcolate a *step* di 0.1 fm e gli elementi $B(EM)$ per un dato stato nucleare eccitato definiti dalla relazione:

$$B(EM) = \frac{1}{2J+1} |\langle b_{J'M'} | r'^{J'} | a_{JM} \rangle|^2. \quad (3.9)$$

Posto $J = 0$ e sfruttando l'equazione (3.8), i valori $B(EM)$ di output corrispondono esattamente agli elementi di matrice $|\langle b_{J'M'} | r'^{J'} | a_{JM} \rangle|^2$.

Abbiamo detto che per calcolare lo *shift* energetico nello stato $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb è necessario conoscere gli elementi di matrice del tipo $|\langle b_{J'M'} | r' | a_{JM} \rangle|^2$. Nel caso dello stato eccitato 1^- questo elemento di matrice viene fornito direttamente dall'output poiché $J' = 1$.

Per tutti i casi in cui $J' \neq 1$ i termini $B(EM)$ forniti dal codice non possono essere utilizzati; allora procediamo come segue. Sfruttiamo in questi casi i valori delle densità di transizione forniti nel file di output del codice. E' necessario ricordare che gli elementi $|\langle b_{J'M'} | r' | a_{JM} \rangle|^2$ possono essere calcolati risolvendo gli integrali $|\int \delta\rho_{JM}(r') r'^3 dr'|^2$. Due metodi che possono essere implementati facilmente per risolvere integrali sono il metodo dei trapezoidi e quello dei rettangoli. Nel nostro caso abbiamo deciso di sfruttare il metodo dei trapezoidi, in quanto il valore degli integrali risulta più preciso. Per verificare l'efficienza del programma appena scritto, calcoliamo il valore del termine $|\int \delta\rho_{JM}(r') r'^3 dr'|^2$ per lo stato 1^- e lo confrontiamo direttamente con il risultato fornito dal codice RPA in cui inseriamo come input: $A = 208$, $Z = 82$, tipo di interazione di Skyrme = **SLy5** (definita nel file **skyrme.in** all'interno del programma [4]) e stato nucleare eccitato 1^- ; l'errore è pari al 2%.

Una volta testato questo programma operiamo nel seguente modo. Avviamo il codice RPA sempre con l'interazione di Skyrme definita **SLy5**, ponendo $A = 208$, $Z = 82$ e cambiando gli stati nucleari eccitati. Infine calcoliamo le ampiezze di transizione $|\int \delta\rho_{JM}(r') r'^3 dr'|^2$ sfruttando i dati $\delta\rho_{JM}(r')$ forniti nel file di output. Ora abbiamo tutti gli ingredienti da inserire nell'equazione (2.21) per calcolare gli effetti di polarizzazione nucleare dovuta all'eccitazione di singoli stati nucleari: gli elementi di matrice $|\langle b_{J'M'} | r' | a_{JM} \rangle|^2$, le energie di eccitazione $E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$, la costante calcolata nell'espressione (3.7).

Nella tabella (3.2) riportiamo i valori di $|\langle b_{J'M'} | r' | a_{JM} \rangle|^2$, $E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$ e lo *shift* energetico calcolato per gli stati nucleari eccitati più bassi mediante metodo RPA con interazione di Skyrme **SLy5**. Inoltre sono riportati i valori sperimentali $E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$, i quali sono stati inseriti nel codice **MUON2** [25] per calcolare i contributi NP riportati nell'articolo [5].

Le correzioni energetiche hanno segno positivo, questo implica un incremento dell'energia di legame.

Capitolo 3. Risultati numerici

J^π	$E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$ (RPA) MeV	$E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$ [5] MeV	$ \langle b_{J'M'} r' a_{JM} \rangle ^2$ fm ²	ΔE (RPA) eV	ΔE [5] eV
3^-	3.61	2.615	6.30443	319	135
2^+	4.92	4.085	3.38196	126	198
4^+	5.40	4.324	0.35002	12	14
3^-	5.89	5.240	0.42305	14	27
2^+	6.47	6.193	0.3795	11	29
1^-	7.69	7.332	0.5868	14	8

Tabella 3.2: Correzione di polarizzazione nucleare calcolata con interazione di Skyrme **SLy5** per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb . Indichiamo con (RPA) i valori calcolati con il codice RPA e con [5] i risultati tabulati riportati nell'articolo [5].

Calcoliamo nuovamente i valori $|\langle b_{J'M'} | r' | a_{JM} \rangle|^2$, $E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$ e lo *shift* energetico per gli stati nucleari eccitati più bassi utilizzando un'altra parametrizzazione dell'interazione di Skyrme (**LNS**, definita nel file `skyrme.in`). Nella tabella (3.3) riportiamo i dati numerici.

J^π	$E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$ (RPA) MeV	$E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$ [5] MeV	$ \langle b_{J'M'} r' a_{JM} \rangle ^2$ fm ²	ΔE (RPA) eV	ΔE [5] eV
3^-	3.37	2.615	6.2001	336	135
2^+	5.30	4.085	3.5623	123	198
4^+	5.56	4.324	0.4149	14	14
3^-	5.52	5.240	0.4820	16	27
2^+	6.59	6.193	0.3234	9	29
1^-	7.52	7.332	0.6532	16	8

Tabella 3.3: Correzione di polarizzazione nucleare calcolata con interazione di Skyrme **LNS** per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb .

Gli *shifts* energetici calcolati con queste due parametrizzazioni possibili per l'interazione di Skyrme (**SLy5** e **LNS**) variano approssimativamente dell'ordine del 10%. Infine calcoliamo i contributi agli *shifts* energetici dello stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb dovuto a singole multipolarità con interazione di Skyrme **SLy5** (nel caso specifico, analizziamo gli stati eccitati di tipo 3^- , 2^+ , 4^+ , 1^- , 0^+ e 5^-).

$E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$ (MeV)	$ \langle b_{J'M'} r' a_{JM} \rangle ^2$ (fm ²)	ΔE (eV)	Cumulated shift (eV)
3.61	6.3044	319	319
5.89	0.4231	14	333
6.11	0.1475	4	337
6.60	1.959	54	391
7.43	1.309	32	423
7.73	0.6704	16	439
8.20	0.7679	17	456
8.42	0.4335	9	465
8.63	0.0917	2	467
8.80	0.3553	7	474
9.02	0.2914	6	480
9.10	0.1209	2	482
9.26	0.1720	3	485
9.37	0.1242	2	487

Tabella 3.4: Correzione di polarizzazione nucleare per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb calcolato con interazioni di Skyrme SLy5, dovuto ai contributi di multipolarità di tipo 3^- .

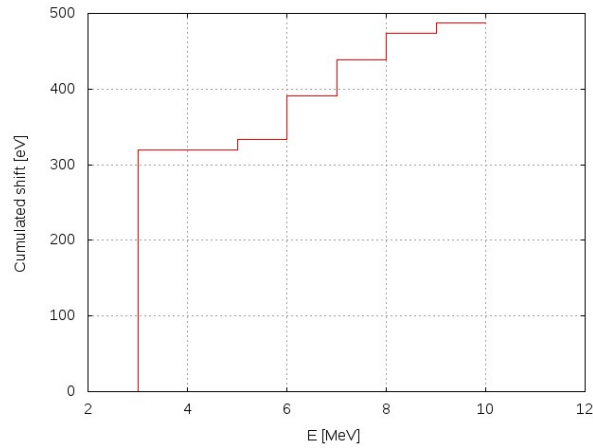


Figura 3.1: Cumulated shift in funzione dell'energia di eccitazione nucleare dovuto ai contributi di multipolarità di tipo 3^- per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb .

$E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$ (MeV)	$ \langle b_{J'M'} r' a_{JM} \rangle ^2$ (fm ²)	ΔE (eV)	Cumulated shift (eV)
4.92	3.3820	126	126
6.47	0.3795	11	137
8.18	0.3730	8	145
11.63	0.0157	0.25	145.25
12.25	4.7674	71	216.25
12.63	0.1807	3	219.25
12.89	0.4726	7	226.25
12.98	1.209	17	243.25
13.58	0.2958	4	247.25
13.97	0.0044	0.06	247.31
14.07	0.276	3	250.31
15.54	0.2994	4	254.31
16.33	0.1060	1	255.31
16.49	0.1139	1	256.31

Tabella 3.5: Correzione di polarizzazione nucleare per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb calcolato con interazioni di Skyrme SLy5, dovuto ai contributi di multipolarità di tipo 2^+ .

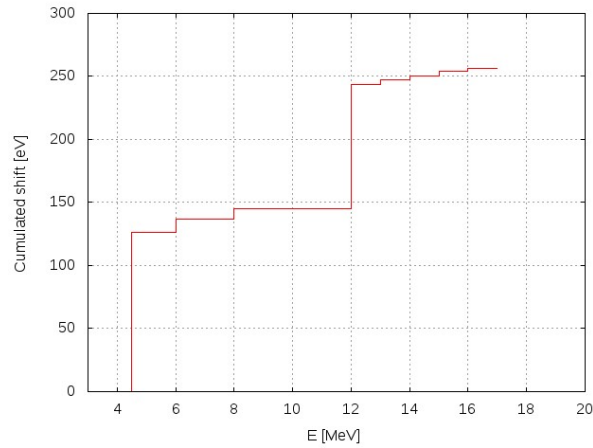


Figura 3.2: Cumulated shift in funzione dell'energia di eccitazione nucleare dovuto ai contributi di multipolarità di tipo 2^+ per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb .

$E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$ (MeV)	$ \langle b_{J'M'} r' a_{JM} \rangle ^2$ (fm ²)	ΔE (eV)	Cumulated shift (eV)
5.40	0.35002	12	12
6.21	0.0352	1	13
6.81	1.2634	34	47
7.59	0.8216	19	66
8.46	0.7462	16	82
9.57	0.1647	3	85
10.20	0.3896	7	92
11.49	0.4109	7	99
12.35	0.7413	10	109
12.61	0.0173	0.3	109.3
12.70	0.1599	2	111.3
13.54	0.0252	0.3	111.6
13.91	0.1813	2	113.6
14.02	0.0932	1	114.6

Tabella 3.6: Correzione di polarizzazione nucleare per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb calcolato con interazioni di Skyrme SLy5, dovuto ai contributi di multipolarità di tipo 4^+ .

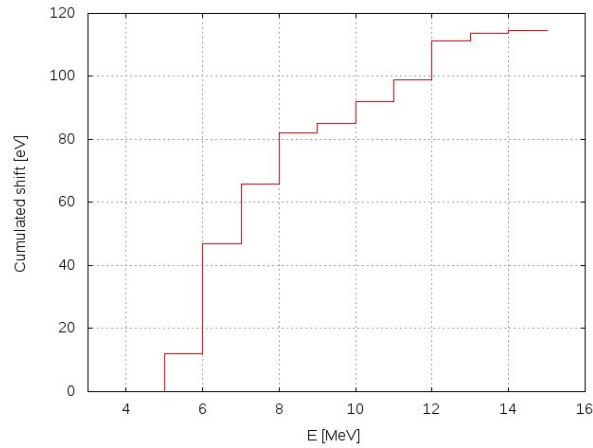


Figura 3.3: Cumulated shift in funzione dell'energia di eccitazione nucleare dovuto ai contributi di multipolarità di tipo 4^+ per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb .

$E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$ (MeV)	$ \langle b_{JM'} r' a_{JM} \rangle ^2$ (fm ²)	ΔE (eV)	Cumulated shift (eV)
7.69	0.5868	14	14
7.86	0.1753	4	18
8.24	$0.1723 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	18.0037
8.51	$0.1936 \cdot 10^{-2}$	$4.2 \cdot 10^{-2}$	18.0457
8.70	0.0341	0.7	18.7457
9.00	$0.9989 \cdot 10^{-2}$	0.2	18.9457

Tabella 3.7: Correzione di polarizzazione nucleare per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb calcolato con interazioni di Skyrme SLy5, dovuto ai contributi di multipolarità di tipo 1^- .

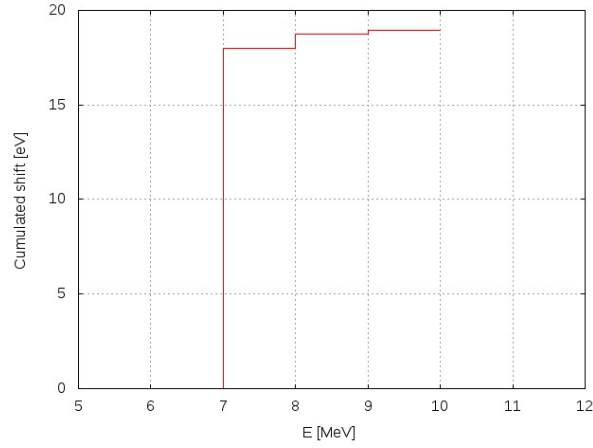


Figura 3.4: Cumulated shift in funzione dell'energia di eccitazione nucleare dovuto ai contributi di multipolarità di tipo 1^- per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb .

$E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$ (MeV)	$ \langle b_{J'M'} r' a_{JM} \rangle ^2$ (fm ²)	ΔE (eV)	Cumulated shift (eV)
11.80	0.2688	4	4
12.56	0.5893	9	13
13.74	0.8507	11	24
14.64	1.3740	17	41
16.89	0.6051	6	47
18.72	0.0031	0.03	47.03
19.54	0.1434	1	48.03
19.99	0.2079	2	50.03
20.30	0.2063	2	52.03
20.73	0.1245	1	53.03

Tabella 3.8: Correzione di polarizzazione nucleare per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb calcolato con interazioni di Skyrme SLy5, dovuto ai contributi di multipolarità di tipo 0^+ .

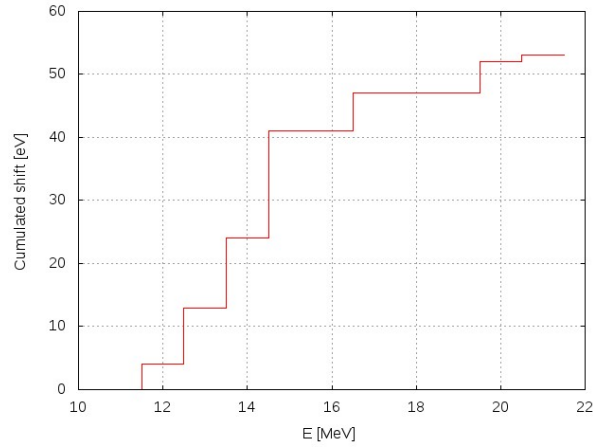


Figura 3.5: Cumulated shift in funzione dell'energia di eccitazione nucleare dovuto ai contributi di multipolarità di tipo 0^+ per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb .

$E_N^{(b)} - E_N^{(a)}$ (MeV)	$ \langle b_{J'M'} r' a_{JM} \rangle ^2$ (fm ²)	ΔE (eV)	Cumulated shift (eV)
5.05	0.0582	2	2
5.93	0.6394	20	22
6.21	0.2616	8	30
7.14	0.6230	16	46
7.34	0.3302	8	54
8.38	0.6591	14	68
9.00	0.0400	0.8	68.8
9.25	0.0425	0.8	69.6
9.56	0.2090	4	73.6
10.20	0.0014	0.03	73.63

Tabella 3.9: Correzione di polarizzazione nucleare per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb calcolato con interazioni di Skyrme SLy5, dovuto ai contributi di multipolarità di tipo 5^- .

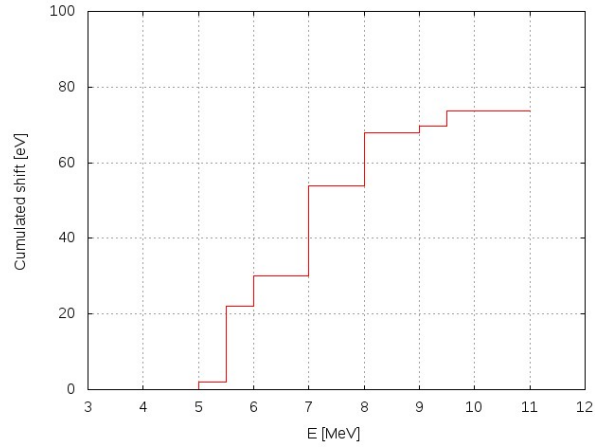


Figura 3.6: Cumulated shift in funzione dell'energia di eccitazione nucleare dovuto ai contributi di multipolarità di tipo 5^- per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb .

Per concludere riportiamo nella tabella (3.10) i contributi totali allo *shift* energetico dello stato $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb dovuto alle singole multipolarità analizzate.

J^π	Cumulated shift (eV)
3^-	487
2^+	256.31
4^+	114.6
1^-	18.9457
0^+	53.03
5^-	73.63
TOT.	1003.5157

Tabella 3.10: Cumulated shift totale per lo stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb dovuto alle singole multipolarità analizzate J^π

Dai risultati mostrati nelle figure si può osservare che l'incremento dell'energia di legame dello stato muonico converge. Inoltre è lecito supporre che gli stati nucleari più collettivi a bassa energia determinano maggiormente lo *shift* energetico muonico, mentre gli stati meno collettivi, quali lo 0^+ o 1^- , sono meno rilevanti.

E' da notare che l'approccio da noi utilizzato è di tipo esplorativo perché, fino ad ora, gli *shifts* energetici muonici per effetto di polarizzazione nucleare non sono mai stati calcolati utilizzando il metodo RPA con un'interazione efficace di Skyrme. La procedura da noi eseguita pecca di sistematicità: ossia non sono stati calcolati i contributi NP per tutte le multipolarità possibili, e non è stato verificato in modo rigoroso che effettivamente gli stati meno collettivi partecipino in modo minore alla determinazione dello *shift* energetico totale. Infine il metodo adottato non è autoconsistente poiché, determinata l'energia del muone nel suo stato fondamentale, non è stato studiato il reale effetto del muone sulla densità di carica nucleare.

Capitolo 4

Conclusioni

Come accennato nell'introduzione, lo studio dell'atomo muonico costituisce un importante strumento per analizzare la struttura interna nucleare, data l'interazione muone-nucleo di natura esclusivamente elettromagnetica.

Il problema dell'atomo muonico risulta essere molto complicato ed è per questa ragione che nel nostro elaborato sono state introdotte diverse semplificazioni. Innanzitutto ci siamo limitati ad analizzare il caso di nuclei a forma sferica (in modo speciale il caso del ^{208}Pb), i quali ammettono uno spettro solo vibrazionale dovuto alla loro invarianza per rotazione. Inoltre, nella trattazione analitica del problema abbiamo utilizzato un'ulteriore semplificazione: una facile parametrizzazione del potenziale muonico valida esclusivamente per gli stati muonici di tipo s .

Per quanto riguarda i risultati numerici degli *shifts* energetici per effetto di polarizzazione nucleare, ci siamo concentrati sul caso dello stato muonico $1s_{1/2}$ del ^{208}Pb . I metodi utilizzati, EWSR e RPA con due diverse interazioni di Skyrme, mostrano dei risultati ragionevoli confrontati con la letteratura.

Osservando i risultati riportati nella sezione (3.2) si può notare che, in generale, i contributi degli stati nucleari eccitati con energia superiore a 15-20 MeV allo *shift* energetico muonico sono del tutto trascurabili. Ne deduciamo che l'incremento dell'energia dello stato muonico converge (approssimativamente ad un valore di 1000 eV). Dall'equazione (2.21) ci si aspetterebbe una convergenza proporzionale a $\frac{1}{E_N^{(b)} - E_N^{(a)}}$; in realtà è molto più forte. Questo implica che solo il contributo degli stati nucleari più collettivi (quelli corrispondenti ad energie di eccitazione bassa) influenza significativamente lo stato muonico.

Come sottolineato nel capitolo precedente, l'approccio da noi adottato è di tipo esplorativo. Il nostro è stato un primo tentativo di calcolare gli *shifts* energetici muonici per effetto di polarizzazione nucleare applicando il

metodo RPA con un'interazione efficace di tipo Skyrme. E' una procedura che deve essere ancora migliorata; ad esempio, si potrebbe valutare l'incremento dell'energia di legame dello stato muonico dovuto a tutti i contributi di multipolarità in modo sistematico. Una volta ottenuto il corretto valore dello *shift* energetico muonico si potrebbe calcolare come varia la densità di carica nucleare attraverso una procedura autoconsistente.

Ulteriori aspetti di questo problema non sono stati trattati. Ad esempio, si potrebbe studiare in modo più rigoroso gli effetti di polarizzazione nucleare su altri stati muonici del ^{208}Pb o provare ad analizzare il caso di altri nuclei sferici.

Una possibilità più ambiziosa consiste nell'estendere questo problema a nuclei deformati, che ammettono, quindi, non solo uno spettro di natura vibrazionale, ma anche rotazionale.

Appendice A

Parametrizzazione del potenziale muonico

K. W. Ford e J. G. Wills dimostrarono che il potenziale muonico definito come:

$$\phi = \int dr r^2 |\psi_\mu(r)|^2 \frac{1}{r}. \quad (\text{A.1})$$

poteva essere semplicemente parametrizzato nella forma

$$\phi(r') = A + Br'^k. \quad (\text{A.2})$$

dove A , B e k sono degli opportuni parametri numerici [21]. Questa approssimazione risulta essere efficace nel caso in cui il muone si trovi in un'orbitale di tipo s . Risolvendo le equazioni di Dirac per una distribuzione di carica nucleare uniforme e supponendo il muone in un stato s , si mostra che il potenziale muonico presenta la seguente espressione:

$$\phi(r') = \phi(0) + a_2 r'^2 - a_4 r'^4 + \dots \quad (\text{A.3})$$

sommata ad ulteriori termini di ordine sempre più piccolo. $\phi(0)$ è un valore costante. Confrontando la parametrizzazione del potenziale fatta da Ford e Wills (eq. A.2) con l'espressione analitica appena trovata (eq. A.3) è possibile legare il valore di k ai momenti di distribuzione di carica $\langle r'^2 \rangle$ e $\langle r'^4 \rangle$.

Il termine costante in questo calcolo è irrilevante: al parametro A è associato il valore di $\phi(0)$. Ci concentriamo quindi sui termini non costanti e definiamo:

$$f_1(r') \equiv a_2 r'^2 - a_4 r'^4 \quad (\text{A.4})$$

$$f_2(r') \equiv Br'^k. \quad (\text{A.5})$$

Appendice A. Parametrizzazione del potenziale muonico

Per ricavare il valore di k confrontiamo i due termini $f_1(r') \simeq f_2(r')$. Integrando sulla distribuzione di carica nucleare $\rho(\mathbf{r}')$ otteniamo:

$$\int f_1(r')\rho(r')r'^2dr' \simeq \int f_2(r')\rho(r')r'^2dr'. \quad (\text{A.6})$$

dove abbiamo supposto che la distribuzione di carica nucleare sia sfericamente simmetrica.

Scriviamo ora $\rho(r')$ come:

$$\rho(r') = \int \theta(r - r')g(r)dr \quad (\text{A.7})$$

dove θ è la funzione gradino e $g(r)$ è dato da:

$$g(r) = -\frac{d\rho(r)}{dr} \quad (\text{A.8})$$

notevolmente piccata attorno a $r = c_0$, tale da poter definire c_0 nel seguente modo:

$$\int (r - c_0)g(r)dr = 0. \quad (\text{A.9})$$

Fatte tali considerazioni procediamo a valutare i termini:

$$\begin{aligned} & \int f_i(r')\rho(r')r'^2dr' = \\ & = \int f_i(r')[\theta(c_0 - r') + (r - c_0)\theta'(c_0 - r') + \frac{1}{2}(r - c_0)^2\theta''(c_0 - r') + \dots] \cdot g(r)r'^2drdr' \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

dove $i = 1, 2$ e dove abbiamo sviluppato in serie di Taylor la funzione θ attorno al punto $r = c_0$.

Risolvendo il primo termine sotto integrale otteniamo:

$$\int f_i(r')\theta(c_0 - r')g(r)r'^2drdr' = \int_0^{c_0} f_i(r')r'^2dr' \int g(r)dr \quad (\text{A.11})$$

il secondo termine si annulla mentre il terzo diventa:

$$\int f_i(r')\left[\frac{1}{2}(r - c_0)^2\theta''(c_0 - r')\right]g(r)r'^2drdr' = \int \frac{1}{2}(r - c_0)^2g(r)dr \int f_i(r')\theta''(c_0 - r')r'^2dr' \quad (\text{A.12})$$

integrando per parti il secondo integrale otteniamo:

$$\int f_i(r')\left[\frac{1}{2}(r - c_0)^2\theta''(c_0 - r')\right]g(r)r'^2drdr' = \frac{1}{2} \int (r - c_0)^2g(r)dr \cdot \frac{d}{dr'}(f_i(r')r'^2)|_{r'=c_0}. \quad (\text{A.13})$$

Appendice A. Parametrizzazione del potenziale muonico

Sfruttando i risultati (A.11) e (A.13) e inserendoli nell'equazione (A.10) si ricava:

$$\int f_i(r')\rho(r')r'^2 dr' = \int_0^{c_0} f_i(r')r'^2 dr' \int g(r)dr + \frac{d}{dr'}(f_i(r')r'^2)|_{r'=c_0} \cdot \frac{1}{2} \int (r-c_0)^2 g(r)dr + \dots \quad (\text{A.14})$$

Affinché venga soddisfatta la relazione (A.6) dobbiamo uguagliare i termini:

$$\int_0^{c_0} f_1(r')r'^2 dr' = \int_0^{c_0} f_2(r')r'^2 dr' \quad (\text{A.15})$$

$$f'_1(c_0)c_0^2 + 2f_1(c_0)c_0 = f'_2(c_0)c_0^2 + 2f_2(c_0)c_0 \quad (\text{A.16})$$

Sfruttando la definizione di f_1 (A.4) e di f_2 (A.5) l'equazione (A.15) diventa:

$$\int_0^{c_0} (a_2 r'^4 - a_4 r'^6) dr' = \int_0^{c_0} B r'^{k+2} dr' \implies a_2 \frac{c_0^5}{5} - a_4 \frac{c_0^7}{7} = B \frac{c_0^{k+3}}{k+3}$$

essendo $c_0 \neq 0$ allora posso dividere il risultato appena ottenuto per c_0^3 :

$$a_2 \frac{c_0^2}{5} - a_4 \frac{c_0^4}{7} = B \frac{c_0^k}{k+3} \implies \frac{7(k+3)a_2 c_0^2 - 5(k+3)a_4 c_0^4}{7 \cdot 5(k+3)} = \frac{5 \cdot 7 \cdot B c_0^k}{5 \cdot 7(k+3)}$$

dividendo ulteriormente per $a_2 c_0^2$:

$$7(k+3) - 5(k+3) \frac{a_4 c_0^2}{a_2} = 5 \cdot 7 \cdot B \frac{c_0^k}{a_2 c_0^2}.$$

Definiamo ora

$$x = \frac{a_4 c_0^2}{a_2} \quad (\text{A.17})$$

e otteniamo così l'espressione finale:

$$(k+3)(7-5x) = 5 \cdot 7 \cdot B \frac{c_0^k}{a_2 c_0^2}. \quad (\text{A.18})$$

Sfruttando sempre la definizione di f_1 (A.4) e di f_2 (A.5) l'equazione (A.16) diventa:

$$2a_2 c_0^3 - 4a_4 c_0^5 + 2a_2 c_0^3 - 2a_4 c_0^5 = B[kc_0^{k+1} + 2c_0^{k+1}] \implies 4a_2 c_0^3 - 6a_4 c_0^5 = B(k+2)c_0^{k+1}$$

dividendo l'espressione per a_2 si ottiene:

$$4c_0^2 - 6 \frac{a_4 c_0^4}{a_2} = \frac{B(k+2)c_0^k}{a_2} \implies 4 - 6 \frac{a_4 c_0^2}{a_2} = \frac{B(k+2)c_0^k}{a_2 c_0^2}$$

Appendice A. Parametrizzazione del potenziale muonico

applicando la stessa sostituzione (A.17) risulta:

$$4 - 6x = \frac{B(k+2)c_0^k}{a_2c_0^2}. \quad (\text{A.19})$$

Mettendo a sistema le equazioni ricavate (A.18) , (A.19) si può ricavare il valore di k :

$$\begin{cases} (k+3)(7-5x) = 5 \cdot 7 \cdot B \frac{c_0^k}{a_2c_0^2} \\ 4-6x = \frac{B(k+2)c_0^k}{a_2c_0^2} \end{cases}$$
$$\frac{4-6x}{(7-5x)(k+3)} = \frac{k+2}{5 \cdot 7} \implies (k+2)(k+3) = \frac{5 \cdot 7(4-6x)}{7-5x}$$
$$(k+2)(k+3) = \frac{5 \cdot 7(4-6x)}{7(1-\frac{5}{7}x)} = \frac{20-30x}{1-\frac{5}{7}x}. \quad (\text{A.20})$$

Con $x \ll 1$

$$k \simeq 2 - \frac{110}{63}x. \quad (\text{A.21})$$

In questo modo abbiamo mostrato una procedura analitica per calcolare esplicitamente il valore di k una volta noti i termini c_0 , a_2 e a_4 .

Appendice B

Metodo alternativo per calcolare gli *shifts* energetici

Un ulteriore metodo per calcolare gli *shifts* energetici nell'atomo muonico è fornito da H. A. Bethe e J.W. Negele [20]. Per calcolare il livello energetico dello stato $1s$ nell'atomo di ^{208}Pb tenendo in considerazione la dimensione finita del nucleo si prosegue nel modo di seguito descritto.

Sperimentalmente si osserva che l'energia di tale stato è

$$E_{exp}(1s) = -10.593 \text{ MeV}. \quad (\text{B.1})$$

Iniziamo a considerare una distribuzione di carica nucleare di raggio finito che dia il valore corretto dell'energia di legame calcolata (B.1). Il caso più semplice è quello di una distribuzione di carica uniforme :

$$\rho_1(r') = \begin{cases} \text{const} & \text{se } r' < R \\ 0 & \text{se } r' > R. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Il valore del raggio R può essere calcolato conoscendo la forma della distribuzione di carica nucleare (B.2) e l'autovalore dell'energia (B.1).

Il metodo consiste nel comparare l'autovalore dell'energia E_2 per un'arbitraria distribuzione di carica ρ_2 con l'autovalore E_1 per la distribuzione ρ_1 . Qualsiasi distribuzione di carica è ammessa a patto che sia rispettata la relazione :

$$E_2 - E_1 \simeq 0. \quad (\text{B.3})$$

Se ρ_2 non differisce di molto da ρ_1 , allora la differenza $E_2 - E_1$ può essere calcolata tramite una teoria perturbativa al primo ordine.

Nella teoria di Dirac, se si considera che agisca solo il potenziale elettrostatico, allora

$$E_2 - E_1 = \int (V_2 - V_1) \xi(r') r'^2 dr', \quad (\text{B.4})$$

Appendice B. Metodo alternativo per calcolare gli *shifts* energetici

con $\xi(r')$ la distribuzione di carica del muone e V_1 e V_2 sono i potenziali elettrostatici generati rispettivamente dalle distribuzioni di carica ρ_1 e ρ_2 . Tale espressione deriva dalla sottrazione tra due equazioni di Dirac con diversi potenziali elettrostatici e diverse energie.

L'equazione (B.4) può essere riscritta a partire dall'equazione di Poisson:

$$\Delta V = -4\pi\rho \quad (\text{B.5})$$

Introducendo una nuova funzione χ , con lo scopo di semplificare i calcoli, tale che:

$$\nabla^2\chi(r') = \xi(r'). \quad (\text{B.6})$$

e normalizzando la distribuzione di carica nucleare ρ :

$$\int \rho x^2 dx = 1 \quad (\text{B.7})$$

con $x = r'/R$ è possibile dimostrare che integrando per parti l'equazione (B.4) si ottiene come risultato finale:

$$E_2 - E_1 = Ze^2 R^{-3} \int (\rho_2 - \rho_1) \chi(r') r'^2 dr'. \quad (\text{B.8})$$

Risolvendo numericamente tale equazione, utilizzando i parametri della tabella B.1, si ottengono i seguenti risultati:

stato	1s	2p _{1/2}	2p _{3/2}
Energia di legame (MeV)	10.5932	4.8095	4.6237
Raggio corrispondente R (fm)	6.941	6.894	6.870

Tabella B.1: Parametri per ²⁰⁸Pb

$$E_2 - E_1 = 7.75 \text{ MeV} \int [\rho_2(x) - \rho_1(x)] [x^2 - 0.4086x^4 + 0.1419x^6 - 0.0428x^8] x^2 dx$$

per lo stato 1s

$$E_2 - E_1 = 0.228 \text{ MeV} \int [\rho_2(x) - \rho_1(x)] [x^2 + 1.60x^4 - 1.00x^6 + 0.403x^8 - 0.126x^{10}] x^2 dx$$

per lo stato 2p_{1/2}

$$E_2 - E_1 = 0.532 \text{ MeV} \int [\rho_2(x) - \rho_1(x)] [x^4 - 0.557x^6 + 0.223x^8 - 0.064x^{10}] x^2 dx$$

Appendice B. Metodo alternativo per calcolare gli *shifts* energetici

per lo stato $2p_{3/2}$

Essendo nota la densità di carica ρ_1 e l'autovalore corrispondente E_1 è possibile calcolare E_2 modificando opportunamente la distribuzione di carica ρ_2 . Osserviamo che per lo stato $1s$ del Piombo i termini sotto integrale sono proporzionali a r'^2 e r'^4 in perfetta coerenza con quanto detto nell'appendice (A).

Bibliografia

- [1] L. N. Cooper, E. M. Henley, *Mu-Mesonic Atoms and Electromagnetic Radius of the Nucleus*, Physical Review 92 (1953) 801 - 811.
- [2] M. H. Khan, *Muonic X-Rays and Equivalent Radius of Nuclear Charge Distribution*, (1973).
- [3] G. A. Rinker, J. Speth, *Nuclear polarization in muonic atoms*, Nuclear Physics A306 (1978) 397 - 405.
- [4] G. Colò, L. Cao, N. V. Giai, L. Capelli, *Self-consistent RPA calculations with Skyrme-type interactions*, Computer Physics Communications 184 (2013) 142 - 161.
- [5] P. Bergem, G. Piller, A. Rueetschi, L. A. Schaller, L. Schellenberg, H. Schneuwly, *Nuclear polarization and charge moments of ^{208}Pb from muonic x rays*, Physical Review C37 (1988) 2821 - 2833.
- [6] J. A. Wheeler, *Some Consequences of the Electromagnetic Interaction between μ^- -Mesons and Nuclei*, Reviews of Modern Physics 21 133 (1949).
- [7] E. Borie, G. A. Rinker, *The energy levels of muonic atoms*, Reviews of Modern Physics 54 (1982) 67 - 114.
- [8] D. Kessler, H. Mes, A. C. Thompson, H. L. Anderson, M. S. Dixit, C. K. Hargrove, R. J. McKee, *Muonic x rays in lead isotopes*, Physical Review C11 (1975) 1719 - 1734.
- [9] N. Manini, *Introduction to the Physics of Matter*, (2014) 21 - 32.
- [10] K. W. Ford, G. A. Rinker, *Analysis of Muonic-Atoms X Rays in the Lead Isotopes*, Physical Review C7 (1973) 1206 - 1221.
- [11] A. Antognini et al., *Proton structure from the measurement of $2s - 2p$ transition frequencies of muonic hydrogen*, Science 339 (2013) 417 - 420.

- [12] A. Antognini, F. Kottermann, F. Biraben, P. Indelicato, F. Nez, R. Pohl, *Theory of the $2s - 2p$ Lamb shift and $2s$ hyperfine splitting in muonic hydrogen*, Annals of Physics 331 (2013) 127-145.
- [13] R. Pohl, R. Gilman, G. A. Miller, K. Pachucki, *Muonic hydrogen and the proton radius puzzle*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 63 (2013) 175.
- [14] M. Diepold, *Lifetime and population of the $2s$ state in muonic hydrogen and deuterium*, Physical Review A88 042520 (2013).
- [15] R. Pohl, *The Lamb shift in muonic hydrogen and the proton radius puzzle*, Hyperfine Interactions 227 (2014) 23 - 28.
- [16] C. A. Bertulani, *Nuclear Physics in a Nutshell*, Princeton University Press, 2007.
- [17] D. J. Rowe, *Nuclear Collective Motion*, Methuen, 1990.
- [18] S. Devons, I. Duerdoth, *Advances in Nuclear Physics, vol. 2, Muonic Atoms*, (1995) 295 - 423.
- [19] G. A. Rinker, *Nuclear polarization in muonic helium*, Physical Review A14 (1976) 18 - 29.
- [20] H. A. Bethe, J. W. Negele, *Semi-Analytical Theory of Muonic-X-Ray Levels*, Nuclear Physics A117 (1968) 575 - 585.
- [21] C. S. Wu, L. Wilets, *Muonic Atoms and Nuclear Structure*, Annual Review of Nuclear Science 19 (1969) 527 - 606.
- [22] K. W. Ford, J. G. Wills, *Muonic Atoms and Radial Shape of the Nuclear Charge Distribution*, Physical Review 185 (1969) 1429 - 1438.
- [23] D. L. Hill, K. W. Ford, *Mu-Mesonic X-Rays and the Shape of the Nuclear Charge Distribution*, Physical Review 94 (1954) 1617 - 1629.
- [24] L. E. Picasso, *Lezioni di meccanica quantistica*, (2015) 276
- [25] G. A. Rinker, *Static and dynamic Muonic-atom codes - Muon and Rurp*, Computer Physics Communications 16 (1979) 221 - 242
- [26] A. Haga, Y. Horikawa, Y. Tanaka, *Nuclear polarization in muonic ^{208}Pb* , Physical Review A66 034501 (2002).
- [27] A. Haga, Y. Horikawa, H. Toki, *Reanalysis of muonic ^{90}Zr and ^{208}Pb atoms*, Physical Review C75 044315 (2007).