



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea in Fisica

**EFFETTO DEL RANGE  
DELL'INTERAZIONE EFFICACE  
SULL'EQUAZIONE DI STATO NUCLEARE**

Relatore:

**Dott. Xavier Roca-Maza**

Correlatore:

**Prof. Gianluca Colò**

Candidato:

**Ruben Viganò**

Matricola n. 777374

**Anno Accademico 2014-2015**

# Indice

|          |                                                                                                           |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>                                                                                       | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Teoria</b>                                                                                             | <b>6</b>  |
| 2.1      | Forza Nucleare . . . . .                                                                                  | 6         |
| 2.1.1    | Caratteristiche forza nucleare . . . . .                                                                  | 6         |
| 2.1.2    | Dimensione del nucleo e distribuzione di carica . . . . .                                                 | 10        |
| 2.2      | Teoria di campo medio autoconsistente . . . . .                                                           | 12        |
| 2.3      | Approssimazione di Hartree-Fock . . . . .                                                                 | 13        |
| 2.3.1    | Equazioni di Hartree-Fock . . . . .                                                                       | 14        |
| 2.3.2    | Interazione di Gogny . . . . .                                                                            | 17        |
| <b>3</b> | <b>Materia simmetrica</b>                                                                                 | <b>20</b> |
| 3.1      | Introduzione . . . . .                                                                                    | 20        |
| 3.2      | Determinazione dell'equazione di stato . . . . .                                                          | 20        |
| 3.2.1    | Energia cinetica . . . . .                                                                                | 20        |
| 3.2.2    | Potenziale . . . . .                                                                                      | 21        |
| 3.2.3    | Equazione di stato per la materia simmetrica . . . . .                                                    | 27        |
| <b>4</b> | <b>Materia neutronica pura</b>                                                                            | <b>29</b> |
| 4.1      | Introduzione . . . . .                                                                                    | 29        |
| 4.2      | Determinazione dell'equazione di stato per la materia neutro-<br>nica pura . . . . .                      | 29        |
| 4.2.1    | Energia cinetica . . . . .                                                                                | 29        |
| 4.2.2    | Potenziale . . . . .                                                                                      | 30        |
| 4.2.3    | Equazione di stato per la materia neutronica . . . . .                                                    | 34        |
| <b>5</b> | <b>Proprietà della materia nucleare e risultati ottenuti</b>                                              | <b>35</b> |
| 5.1      | Proprietà . . . . .                                                                                       | 35        |
| 5.2      | Determinazione dei parametri dell'interazione . . . . .                                                   | 39        |
| 5.2.1    | Valori sperimentali utilizzati per la determinazione dei<br>parametri per la materia neutronica . . . . . | 46        |
| 5.3      | Fit . . . . .                                                                                             | 49        |
| 5.4      | Massa efficace . . . . .                                                                                  | 51        |
| 5.4.1    | Materia simmetrica . . . . .                                                                              | 52        |

|                                                                                             |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <i>INDICE</i>                                                                               | 2         |
| 5.4.2 Materia neutronica . . . . .                                                          | 55        |
| <b>6 Conclusioni</b>                                                                        | <b>58</b> |
| <b>A Appendice: calcolo del volume d'intersezione fra due sfere<br/>di raggio qualsiasi</b> | <b>61</b> |
| <b>Bibliografia</b>                                                                         | <b>63</b> |
| <b>Ringraziamenti</b>                                                                       | <b>65</b> |

# Capitolo 1

## Introduzione

Uno dei problemi della fisica teorica nucleare ancora irrisolto risulta essere la determinazione di un potenziale efficace microscopico in grado di descrivere accuratamente l'interazione fra nucleoni all'interno dei nuclei e le loro proprietà.

Questo è dovuto al fatto che è difficile calcolare le forze efficaci che regolano le interazioni nucleari. Inoltre, i modelli teorici che sono stati elaborati per i potenziali microscopici sulla base dei risultati delle sezioni d'urto ottenuti nello scattering fra nucleoni, sono in grado solo di descrivere il comportamento di nuclei leggeri.

Di conseguenza, si è adottato un approccio più pragmatico: utilizzare un potenziale efficace fenomenologico con parametri che poi vengono determinati utilizzando alcuni dati sperimentali, quali, ad esempio, l'energia di legame per nucleone, la compressibilità, l'energia di saturazione, ecc., per poi risolvere il problema di molti corpi assumendo l'approssimazione più semplice: quella che considera i nucleoni come particelle indipendenti sotto l'azione di un campo medio esterno, che è statico ed è creato dalle particelle stesse.

Questo approccio coincide con risolvere il potenziale a livello di Hartree-Fock. Il vantaggio di questi modelli è che si possono impiegare anche per lo studio di nuclei pesanti, e non solo per quelli leggeri.

Uno dei vantaggi nell'utilizzo delle forze efficaci fenomenologiche rispetto a quelle microscopiche, è che le prime non dipendono dall'energia, cioè sono statiche; mentre le seconde sì.

Esistono diversi tipi differenti di interazioni efficaci fenomenologiche, che sono state impiegate nei problemi di fisica nucleare. Ciascuna di esse è stata utilizzata per la risoluzione di problemi nucleari ben specifici e, l'intervallo di validità di ciascuna varia considerevolmente.

Un esempio di questi potenziali effettivi fenomenologici sono: l'interazione di Gogny e l'interazione di Skyrme, entrambe non relativistiche.

L'interazione di Skyrme fu proposta da Skyrme nel 1956 (Sk 56, 59) e si tratta di un'interazione a range nullo. Questa assunzione è giustificata

dalla proprietà delle forze nucleari di essere a corto raggio di interazione. Grazie ai notevoli risultati in accordo con i dati sperimentali riguardanti l'energia di legame e i raggi dei nuclei all'interno della tavola periodica, la forza di Skyrme è stata largamente utilizzata come potenziale d'interazione tra nucleoni nel mezzo nucleare, all'interno della teoria di campo medio.

Il potenziale di Gogny, invece, è un potenziale d'interazione a range finito. La prima espressione di forza nucleare efficace fenomenologica a range d'interazione finito, fu presentata da D.M. Brink e E. Boeker nel 1967 [Brink and Boeker, 1967]. Nel loro articolo si servirono di un potenziale costituito dalla somma di due gaussiane, ciascuna di range d'interazione opportuno, per poter descrivere il comportamento d'interazione a corto (attorno a 0.6 fm) e a lungo range (attorno a 1.2 fm) dei nucleoni.<sup>1</sup> Questo lavoro venne poi ripreso e migliorato da Gogny e Dechargé [Dechargé and Gogny, 1980].

In questo lavoro si focalizzerà l'attenzione sulla forza d'interazione di Gogny presa non nella sua interezza, ma semplificandola: si assumerà che l'interazione possa essere descritta soltanto da una gaussiana e, quindi, si userà solo un range d'interazione anziché due, e si trascureranno i termini dipendenti dalla densità, in quanto sono a range zero e si vorrebbe capire se è possibile elaborare un'interazione a range finito che sia in grado di descrivere tutte le più importanti proprietà dei nuclei. Inoltre, ad oggi, nessuno ha elaborato un simile potenziale, se non per modelli relativistici. L'obiettivo di questo elaborato sarà quello di determinare i parametri che entrano nell'espressione del potenziale di Gogny semplificato, come menzionato sopra, una volta fissato il range d'interazione. La scelta del valore del range è discesa dai valori adottati nell'articolo Sellahewa and Rios [2014]. In tale articolo gli autori spiegano che la scelta dei valori del range non è casuale: ci sia spetta che per simulare il corto e lungo range d'interazione della forza nucleare sia necessario un valore del range d'interazione compreso fra 0.6 e 1.2 fm.

Si studierà la forza di Gogny sia per il caso di materia nucleare simmetrica<sup>2</sup>, che per quello di materia puramente neutronica.<sup>3</sup> Per la determinazione delle equazioni di stato (EOS) ci si servirà del metodo di Hartree-Fock, altrimenti detto di campo medio, cioè si prenderà in considerazione solo il primo termine dello sviluppo diagrammatico della teoria dei molti corpi. Infine, per trovare i parametri che descrivono al meglio l'interazione fra i nucleoni, si utilizzeranno le proprietà della materia nucleare che caratterizzano le equazioni di stato in prossimità della densità di saturazione  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ . Tali proprietà saranno presentate e spiegate nella sezione "Proprietà" nel capitolo

<sup>1</sup>Si ricordi che le dimensioni del nucleo sono circa  $R = 1.2A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$ .

<sup>2</sup>Si tratta di sistema infinito caratterizzato dall'avere la densità neutronica uguale a quella protonica

<sup>3</sup>Si definisce materia puramente neutronica, un sistema infinito in cui tutte le particelle costituenti sono neutroni. Esso è ottenuto dalla materia simmetrica, per mezzo della conversione di tutti i protoni, in essa presenti, in neutroni.

5. Esse sono: il valore dell'energia per particella per la materia simmetrica e per la materia neutronica, la compressibilità del sistema ( $K$ ) della materia simmetrica, il parametro di pendenza ( $L$ ) della materia neutronica e la pressione ( $P$ ) della materia simmetrica, valutando tutte queste grandezze in corrispondenza del valore di saturazione nucleare.<sup>4</sup> Una volta determinati i valori dei parametri, verranno calcolati i valori delle seguenti grandezze fisiche in condizioni di saturazione: energia per particella per materia simmetrica e neutronica, pressione per la materia simmetrica, compressibilità per la materia simmetrica, parametro di pendenza, massa efficace dei nucleoni sia per materia neutronica che simmetrica. Infine, verranno forniti dei grafici che mostrano: l'andamento dell'energia per particella in funzione della densità, sia per quanto riguarda la materia nucleare simmetrica, che per quella puramente neutronica, la massa efficace e il modulo di incompressibilità, al variare del range d'interazione.

Il lavoro si articolerà in quattro capitoli. Nel primo capitolo verranno ripresi i concetti fondamentali sulla fisica nucleare, verrà introdotto e spiegato il potenziale di interazione di Gogny originale, si richiamerà il metodo di Hartree-Fock e verranno presentate le equazioni ad esso corrispondenti. Nel secondo capitolo verrà ricavata l'equazione di stato per la materia simmetrica, applicando il metodo di Hartree-Fock, al potenziale di Gogny semplificato. Nel terzo capitolo verrà ricavata l'equazione di stato per la materia nucleare puramente neutronica, sempre applicando il metodo di Hartree-Fock, al solito potenziale di Gogny semplificato. Infine, nell'ultimo capitolo, verranno presentati i valori dei parametri che meglio fittano il potenziale di Gogny studiato, verranno forniti i grafici sull'andamento delle equazioni di stato in funzione della densità, per entrambi i casi di materia nucleare, e verranno calcolate le masse efficaci dei due tipi di sistemi nucleari.

---

<sup>4</sup>Per definizioni delle quantità, si veda la sezione "proprietà" al capitolo "Risultati e proprietà"

# Capitolo 2

## Teoria

### 2.1 Forza Nucleare

Lo scopo di questa sezione è quella di descrivere brevemente le caratteristiche principali dell'interazione nucleone-nucleone.

#### 2.1.1 Caratteristiche forza nucleare

Vediamo ora quali sono le caratteristiche della forza nucleare. Per maggiori dettagli si vedano, ad esempio, i libri [P.Ring and Schuck, 2004, Krane, 1955].

1. Carattere attrattivo

L'esistenza del deutone con momento angolare totale  $\mathbf{J} = 1$  e la parità positiva è indice del fatto che la forza fra un protone e un neutrone è di tipo attrattivo, almeno nello stato di tripletto ( $^3S_1$ ). Inoltre, dai risultati sperimentali riguardanti l'interferenza tra la diffusione coulombiana e nucleare in un sistema protone-protone, emerge che anche la forza nucleare fra protone e protone, è di tipo attrattivo nello stato  $^1S_0$ . Come ultimo dato sperimentale a sostegno dell'attrazione della forza nucleare fra qualsiasi nucleone è l'esistenza di nuclei atomici legati stabili.

2. Corto raggio d'interazione

La sezione d'urto nello scattering fra protone e neutrone, in cui il nucleone incidente ha l'energia di 10 MeV, è isotropa. Pertanto risulta che lo scattering avviene in stati d'onda s relativi dei due nucleoni. Questo risultato consente di stimare il range d'interazione nucleone-nucleone a partire dal momento angolare orbitale nel limite classico  $\hbar l_{max} = rp$ , che contribuisce all'ampiezza di scattering. Infatti, sostituendo la

relazione fra energia  $E$  e momento  $p$  si ottiene

$$l_{max} = r \left( \frac{2m_{rid}E}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx r(fm) \left( \frac{E}{40MeV} \right) \quad (2.1)$$

Dove  $m_{rid}$  è la massa ridotta del sistema e sono state usate le relazione

$$1 \text{ Fermi} = 1 \text{ fm} \equiv 10^{-13} \text{ cm} \quad (2.2)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} = 20.8 \text{ MeV fm}^2 \quad (2.3)$$

L'equazione (2.3) è molto utile, infatti fissa le scale di energia in fisica nucleare. Dal momento che  $l_{max} < 1$  per energie fino a 10 MeV, segue dall'equazione (2.1) che il raggio d'azione della forza nucleare, altrimenti detto range, è

$$r \approx 1 \text{ fm} \quad (2.4)$$

Un'altra evidenza sperimentale a supporto della natura a corto raggio della forza nucleare deriva dal fatto che l'energia di legame per nucleone è costante, indipendentemente dalle dimensioni del nucleo. Infatti, se la forza nucleare fosse a lungo raggio d'azione come quella di Coulomb, allora l'energia per nucleone crescerebbe linearmente con il numero di nucleoni:

$$B \propto A(A-1)$$

in quanto, dati  $A$  nucleoni, ci sarebbero  $\frac{1}{2}A(A-1)$  interazioni fra coppie di nucleoni. In altre parole, se la forza fra due nucleoni fosse indipendente dalla presenza di altri nucleoni, l'energia per nucleone crescerebbe linearmente con  $A$ . Ciò avviene nel caso della forza di Coulomb, poiché, essendo una forza a lungo raggio, non satura il sistema; detto altrimenti, una singola particella interagisce con qualsiasi altra particella presente nel sistema, cioè non si ha un'interazione a "primi vicini". Questo è il caso degli atomi legati. Tuttavia, per i nuclei, si osserva che l'energia per nucleone è, approssimativamente, costante. Da ciò segue che l'interazione fra nucleoni è a corto raggio. Quando si verifica questo fatto, si dice che l'interazione satura il sistema.

### 3. Dipendenza dallo spin e hard-core

Lo stato di tripletto  $^3S_1$  ha uno stato legato, il deutone, mentre lo stato di singoletto  $^1S_0$  no. Inoltre, per due particelle identiche, la forza

nucleare non è sufficiente per tenerle legate dal momento che dovrebbero avere spin anti-allineati per soddisfare al principio di esclusione di Pauli; il quale afferma che due fermioni possono trovarsi nello stesso stato quantico, a patto di avere almeno un numero quantico differente. Questo è conseguenza della statistica applicata ai fermioni, secondo cui la funzione d'onda descrivente lo stato di un sistema fermionico, deve essere antisimmetrica.<sup>1</sup> Ne consegue che il protone e il neutrone sono particelle differenti, cioè devono differire per almeno un numero quantico. Quindi, in quanto differenti, possono trovarsi vicine e le loro funzioni d'onda sovrapporsi, senza che venga violato il principio di esclusione di Pauli, pur avendo spin allineati.

Infine, se le due particelle, pur essendo diverse presentano spin anti-allineati, la forza nucleare risulta essere troppo debole per tenerle legate.

Sempre a causa del principio di esclusione di Pauli, dai dati sperimentali è emerso che il potenziale d'interazione fra nucleoni presenta un hard-core repulsivo a circa  $r \approx 0.4$  fm.

#### 4. Non centralità

Poiché è stato osservato che il deutone è dotato di un momento di quadrupolo, il momento angolare orbitale non può essere una costante del moto, mentre il momento angolare totale  $\mathbf{J}$  sì. Da ciò ne consegue che il potenziale fra nucleoni non può essere invariante solamente sotto rotazione delle coordinate spaziali.

#### 5. Indipendenza dalla carica e isospin

La forza fra nucleone-nucleone non dipende dalla carica, ossia la forza d'interazione fra protone-protone (p-p), protone-neutrone (p-n), neutrone-neutrone (n-n) è la stessa, in buona approssimazione. Questo fatto ci permette di vedere il protone e il neutrone come stati differenti di una stessa particella denominata nucleone. La distinzione sostanziale fra il protone e il neutrone, risiede nelle loro proprietà elettromagnetiche: la carica e il momento di dipolo. Se si ha a che fare solo con l'interazione forte e si è in assenza di interazioni elettromagnetiche, un protone è praticamente indistinguibile da un neutrone<sup>2</sup>. Matematicamente, per distinguere il protone dal neutrone, è necessario introdurre un numero quantico per il nucleone, detto isospin  $\mathbf{t}$ . Questo numero quantico descrive i due possibili stati di un nucleone, cioè protone o

<sup>1</sup>Data una funzione d'onda  $\Psi$ , essa è detta antisimmetrica quando  $P_{ij}\Psi = -\Psi$ , dove  $P_{ij}$  è l'operatore di permutazione che scambia la particella  $i$ -esima con la  $j$ -esima.

<sup>2</sup>La differenza di massa fra il protone e il neutrone, infatti, è dovuta al fatto che la simmetria di isospin non è perfetta, ma quasi.

neutrone. I due stati vengono distinti da  $t_0 = \pm \frac{1}{2}$ , il valore di aspettazione della terza componente dell'operatore di isospin  $\mathbf{t}$ . Solitamente le funzioni d'onda del protone e del neutrone vengono indicate così

- protone:

$$|p\rangle := |t = \frac{1}{2}, t_0 = +\frac{1}{2}\rangle \quad (2.5)$$

- neutrone:

$$|n\rangle := |t = \frac{1}{2}, t_0 = -\frac{1}{2}\rangle \quad (2.6)$$

In un sistema nucleare costituito da  $A$  nucleoni, l'isospin totale è

$$\mathbf{T} = \sum_i^A \mathbf{t}(i) \quad (2.7)$$

In assenza di interazioni elettromagnetiche, ci si aspetta che l'isospin sia una costante del moto. Di conseguenza, gli autostati dell'hamiltoniana sono anche essi autostati di  $\mathbf{t}^2$ , cioè il quadrato dell'operatore di isospin  $\mathbf{t}$ , così come lo è la terza componente di isospin  $\mathbf{t}_0$ . Perciò ciascun autostato può essere etichettato con  $t$  e  $t_0$ , con  $t(t+1)$  come valore di aspettazione di  $\mathbf{t}^2$  e  $t_0$ , come valore di aspettazione di  $\mathbf{t}_0$ .

Si osservi che, nonostante l'interazione forte fra nucleoni non dipenda dalla carica di isospin, l'ampiezza di scattering e la sezione di scattering, invece, dipendono dal tipo di nucleone che risulta essere coinvolto nel processo, a causa del principio di esclusione di Pauli. Infatti, per via del principio di esclusione di Pauli, gli stati disponibili dei nucleoni sono diversi, a seconda che ad interagire siano nucleoni nello stesso stato di isospin o diverso. In particolare nucleoni diversi possono stare nello stato  ${}^3S_1$ , mentre nucleoni identici no.

## 6. Carattere di scambio

Sperimentalmente dallo scattering fra protone e neutrone condotto ad energie prossime ai 600 MeV, è risultato che la sezione d'urto differenziale presenta una simmetria attorno ai 90 gradi. Quindi solo gli stati con momento angolare orbitale pari contribuiscono all'ampiezza di scattering.<sup>3</sup>

Per spiegare questo comportamento, è necessario introdurre il concetto di forza di scambio, come segue:

$$V_M = V(x)P_M \quad (2.8)$$

---

<sup>3</sup>Si ricordi che la parità di una funzione  $\Psi$  è data da  $(-1)^l$ , dove  $l$  è il momento angolare orbitale

dove  $P_M$  è l'operatore di scambio delle coordinate di Majorana, il quale agisce sulle coordinate della funzione d'onda nel modo seguente

$$P_M^{i,j} \phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) := \phi(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) \quad (2.9)$$

Dal momento che

$$P_M Y_{lm}(\hat{x}) := Y_{lm}(-\hat{x}) = (-1)^l Y_{lm}(\hat{x}) \quad (2.10)$$

i termini aventi  $l$  dispari nell'ampiezza di scattering possono essere eliminati introducendo il potenziale di Serber:

$$V := V(x) \frac{1}{2} (1 + P_M) \quad (2.11)$$

## 7. Forza di spin-orbita

Poiché non è possibile spiegare come mai negli esperimenti la polarizzazione dei nucleoni diffusi sia perpendicolare al piano di scattering, e poiché non si riesce a spiegare l'esistenza dei numeri magici<sup>4</sup>, è stata introdotta la forza di spin-orbita

$$V = -V_{so} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

Dove  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  è l'operatore di spin-orbita e  $V_{so}$  è un potenziale fenomenologico a corto range.

Il contributo di spin-orbita è effettivo solo a grandi energie, dal momento che si annulla negli stati  $s$  ( $L = 0$ ). Inoltre il termine di spin-orbita riveste un ruolo importante, poiché spiega l'esistenza dei numeri magici e gli effetti di splitting previsti dai modelli a shell, solo se contengono il termine di spin-orbita.

### 2.1.2 Dimensione del nucleo e distribuzione di carica

Attraverso lo studio dei risultati sperimentali ottenuti dalla diffusione di elettroni con lunghezza d'onda piccola attraverso i nuclei, è stato possibile dare una descrizione della dimensione del nucleo e della sua distribuzione di carica elettrica. Dall'analisi dello sfasamento risultante dalla diffusione elastica di elettroni, il nucleo presenta una distribuzione di carica elettrica del tipo  $\rho = \rho_0 (1 + e^{\frac{r-R}{a}})^{-1}$ , detta potenziale di Woods-Saxon, dove  $a$  è il parametro che misura la diffusività della superficie nucleare e  $R$  è il punto in cui  $\rho = \frac{1}{2} \rho_0$ .

Da questo modello si evincono le seguenti proprietà:

---

<sup>4</sup>I numeri magici sono  $N=2,8,20,28,50,82,126,34$ . I nuclei atomici che possiedono un numero di neutroni o di protoni pari a un numero magico, risultano essere più stabili degli altri e sono detti nuclei magici.

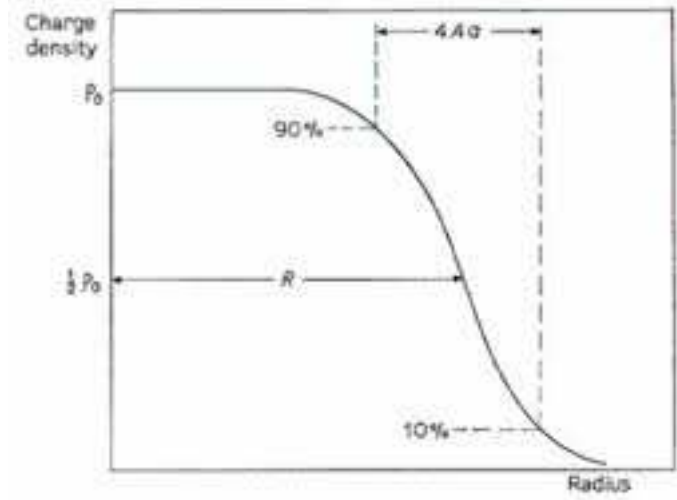


Figura 2.1: Distribuzione della densità di carica nucleare

1. la densità nucleare centrale è approssimativamente costante e vale  $\rho_0 = 0.16$  nucleoni/fm<sup>3</sup>. Ciò è dovuto alla proprietà della forza nucleare di essere a corto raggio d'azione: ciascun nucleone interagisce solo con quelli a lui strettamente vicini, cosicché quando si aggiunge un nuovo nucleone all'interno del nucleo, gli altri non risentono dell'effetto diretto, in prima approssimazione, esclusi quelli che si trovano strettamente vicino ad esso. Di conseguenza la densità nucleare centrale è approssimativamente indipendente dal numero  $A$  di nucleoni che costituiscono il nucleo.
2. il raggio vale  $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ , con  $r_0 \approx 1.17$  fm [Piekarewicz, 2104]. Assumendo che il nucleo sia sferico<sup>5</sup>, è possibile stimare il suo volume come  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Di conseguenza la densità del nucleo per particella risulta essere
 
$$\rho_0 = \frac{A}{V} = \frac{3}{4\pi r_0^3} = 0.16 \text{ fm}^{-3} \quad (2.12)$$
3. il raggio quadratico medio del protone è  $r_p = 0.77$  fm, mentre la distanza media inter-particellare nei nuclei, data da  $\rho = l^{-3}$ , vale  $l \approx 1.73$  fm. Poiché  $l > 2r_p$ , è possibile capire le proprietà dei nuclei esaminando il comportamento di un insieme di nucleoni interagenti attraverso un potenziale medio a due corpi.

<sup>5</sup>Questa approssimazione non è vera per tutti nuclei, ma lo per alcuni come, ad esempio, i nuclei magici e i nuclei a shell chiuse.

## 2.2 Teoria di campo medio autoconsistente

Il modello di campo medio autoconsistente (SCFM) è molto utile per indagare la struttura dei sistemi nucleari. Questo approccio risulta essere una via di mezzo fra modelli *ab initio*, che partono con un potenziale nucleone-nucleone nel vuoto, e modelli macroscopici, come ad esempio, quello a goccia. I primi tipi di modello sono molto accurati nel riprodurre i dati sperimentali riguardanti lo scattering tra nucleoni; ma falliscono nella previsione quantitativa del punto di saturazione, se non si tiene conto dell'interazione a tre corpi [M.Bender et al., 2003]. Nonostante ciò, nascono una serie di problemi quando si utilizzano tali modelli per descrivere sistemi a molti corpi. Sono stati formulati molti modelli per il potenziale per riprodurre i valori sperimentali. I risultati che si ottengono dipendono fortemente, sia dal modello di potenziale scelto, che dalla tecnica matematica di molti-corpi usata per risolvere il problema. I modelli macroscopici, invece, tendono a riprodurre bene le proprietà medie dei sistemi, come l'andamento dell'energia di legame, ma sono unicamente basati su considerazioni fenomenologiche.<sup>6</sup> Essi parametrizzano l'energia in termini di proprietà globali quali: l'energia di volume, l'energia di superficie, l'energia di asimmetria, ecc.

Inoltre, la maggior parte di questi modelli, non spiega l'esistenza dei numeri magici dei nuclei<sup>7</sup>, né di altri effetti di shell in generale. Pertanto, l'idea è quella di raggiungere un compromesso fra i due modi di procedere. L'approccio SCMF inizia con una descrizione microscopica. Il metodo consiste nel trovare un potenziale di campo medio autoconsistente<sup>8</sup> utilizzando proprietà fenomenologiche per determinare i parametri del potenziale efficace nel mezzo adottato. Si ha così una teoria in approssimazione di Hartree-Fock. Trovare un'espressione di campo medio partendo solo dall'interazione fra nucleoni nel vuoto non è complesso, ma non si è in grado di riprodurre i dati sperimentali. Tipicamente quello che si fa è servirsi di un funzionale efficace, motivato dalla teoria *ab initio* e si determinano i parametri che compaiono in tale funzionale utilizzando i dati sperimentali. Per maggiori dettagli sulla teoria di campo autoconsistente si consulti [M.Bender et al., 2003].

<sup>6</sup>Per dettagli si veda ad esempio [P.Ring and Schuck, 2004]

<sup>7</sup>I numeri magici sono  $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, 34$ . I nuclei che presentano un numero o di protoni o di neutroni uguali a questi numeri magici, sono particolarmente stabili e sono detti nuclei magici. I nuclei che presentano un numero sia di protoni che di neutroni uguale ai numeri magici, sono detti nuclei doppiamente magici.

<sup>8</sup>Il metodo autoconsistente è un metodo iterativo che consiste nel risolvere l'equazione di schrödinger usando una funzione d'onda di prova, trovando, quindi, una nuova funzione d'onda e il potenziale di campo medio corrispondente, che viene a sua volta inserito nell'equazione di Schrödinger. Si itera il processo sino a quando non viene raggiunta l'autoconsistenza, cioè quando la funzione d'onda non varia più in maniera significativa fra uno step e l'altro del processo.

## 2.3 Approssimazione di Hartree-Fock

In questa sezione diamo una spiegazione del metodo di Hartree-Fock, in quanto è stato utilizzato per calcolare l'equazione di stato (EOS) sia per la materia nucleare simmetrica, che per quella neutronica pura. Per maggiori dettagli sul formalismo in seconda quantizzazione del metodo di Hartree-Fock, si rimanda alla consultazione del testo [Alexander L. Fetter, 2003, P. Ring and Schuck, 2004].

Dall'accordo fra i dati sperimentali e i risultati teorici ottenuti utilizzando il modello a shell, si può assumere in buona approssimazione per alcune proprietà nucleari, che i nucleoni si muovano indipendentemente l'uno dall'altro all'interno di un potenziale medio prodotto da tutti gli altri nucleoni meno quello che si sta considerando. Il problema ora sta nel ricavare questo potenziale di singola particella a partire da un'interazione a due corpi.

Si incominci col considerare l'hamiltoniana  $H_0$ , la quale descrive il moto di  $N$  particelle indipendenti che si muovono, eventualmente, in un potenziale locale esterno  $U^{ext}(i)$ <sup>9</sup>:

$$H_0 = \sum_{i=1}^N h(i) = \sum_{i=1}^N \frac{-\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + U^{ext}(i) \quad (2.13)$$

Dove  $\hbar c$  è la costante di Planck divisa per  $2\pi$  e moltiplicata per il valore della velocità della luce nel vuoto;  $\nabla_i^2$  è il laplaciano;  $mc^2$  è la massa del nucleone, calcolata come media tra la massa del protone  $m_p$  e del neutrone  $m_n$ :

$$m = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p} \quad (2.14)$$

Ad essa va aggiunta l'interazione a due corpi  $H_1$ :

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N v(i, j) \quad (2.15)$$

che descrive l'interazione fra i nucleoni.

L'hamiltoniana descrivente il sistema risulta essere quindi

$$H = H_0 + H_1 = \sum_{i=1}^N \frac{-\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + U^{ext}(i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N v(i, j) \quad (2.16)$$

Dove il fattore  $\frac{1}{2}$  è stato messo per eliminare il doppio conteggio dell'energia d'interazione a due corpi. Nei metodi di campo medio ciascuna delle  $N$  particelle occupa uno stato di singola particella, quindi il moto di ciascuna di esse è indipendente dalla presenza delle altre. La descrizione a singola particella

---

<sup>9</sup>Nel caso nucleare non c'è. In fisica atomica, esso corrisponde al potenziale centrale che descrive l'attrazione fra elettroni e nucleo.

di un sistema fornisce ottimi risultati in accordo con i dati sperimentali per diversi sistemi, quali: metalli, atomi e nuclei. In virtù di ciò, si è soliti utilizzare questo modello, assumendo che ciascuna particella con funzione d'onda  $\phi_i(\mathbf{r})$ , si muova in un potenziale medio derivante dall'interazione di tutte le altre particelle, detto potenziale di Hartree:

$$U_H(\mathbf{r}) = \sum_i^N \int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi_j(\mathbf{r}')|^2 \quad (2.17)$$

In questa approssimazione, il termine descrivente l'interazione a due corpi tra i nucleoni (2.15), viene sostituito dal potenziale di Hartree (2.17), calcolato come media del potenziale a due corpi  $H_1$ .

L'hamiltoniana  $H$  del sistema è pertanto

$$H_{eff} = \left( \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U^{ext}(\mathbf{r}) + U_H(\mathbf{r}) \right) \quad (2.18)$$

L'energia totale del sistema è data dal valore di aspettazione di  $H$ , nonché dalla somma di due termini. Per quanto riguarda il primo, si tratta del valore di aspettazione di  $H_0$ , cioè l'energia della particella che si muove in un potenziale esterno. Il secondo, invece, rappresenta l'energia di interazione media dovuta all'interazione fra i nucleoni (potenziale di Hartree (2.17)), calcolata come media dell'interazione sugli stati occupati dalle altre particelle. In particolare non si sta considerando l'interazione fra la particella e il resto delle  $N-1$  particelle, in quanto statica.

L'equazione di Schrödinger descrivente il sistema a cui si perviene è perciò:

$$\left( \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U^{ext}(\mathbf{r}) + U_H(\mathbf{r}) \right) \phi_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i \phi_i(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

L'autovalore dell'energia corrispondente al ground-state effettivo  $|\Psi\rangle$  è  $E_{GS} = \langle \Psi | H | \Psi \rangle$ .

Il problema è che, solitamente, la funzione d'onda reale  $|\Psi\rangle$  non è conosciuta e bisogna trovare un modo per poterla calcolare in maniera approssimata. Uno di questi metodi è il metodo auto-consistente. Poiché il termine di potenziale locale include l'autointerazione delle particelle e non soddisfa alla condizione di antisimmetrizzazione della funzione d'onda, è necessario introdurre un termine, detto di scambio o potenziale di Fock. Grazie ad esso, si ha così l'annullamento del contributo di autointerazione.

### 2.3.1 Equazioni di Hartree-Fock

Le equazioni di Hartree-Fock vengono ricavate applicando il principio variazionale. Siano  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$  l'insieme delle funzioni d'onda ortonormali<sup>10</sup> di

<sup>10</sup>Date due funzioni d'onda  $\phi_i$  e  $\phi_j$ , esse sono dette ortonormali se vale  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}$ , con  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ .

singola particella. Si consideri come funzione d'onda di prova che meglio approssima la funzione d'onda reale di  $N$  fermioni, il determinante di Slater così definito:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (-1)^{\{P\}} P |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle \quad (2.20)$$

Dove  $P$  è l'operatore di permutazione e  $\{P\}$  è la parità della permutazione, cioè il numero di scambi costituenti  $P$ . È importante sottolineare il fatto che l'energia di ground-state di  $|\Psi\rangle$ ,  $E_{HF}$ , costituisce la miglior stima per eccesso del limite superiore dell'energia ground-state  $E_{GS}$  per un sistema a  $N$  particelle indipendenti. La differenza fra l'energia  $E_{GS}$  e l'energia  $E_{HF}$ , si chiama energia di correlazione  $E_C$ , ed è negativa per definizione:

$$E_C = E_{GS} - E_{HF} < 0 \quad (2.21)$$

L'energia che deve essere minimizzata è

$$E[\Psi] = \langle \Psi | H | \Psi \rangle \equiv E_{HF}[\phi_1, \dots, \phi_N] \quad (2.22)$$

Si tratta ora di calcolare  $E[\Psi]$ . Poiché l'hamiltoniana  $H$  è costituita dalla somma fra l'hamiltoniana  $H_0$ , che agisce solo sulla particella  $i$ -esima e dalla hamiltoniana  $H_1$  che descrive l'interazione fra la  $i$ -esima e  $j$ -esima particella, si può calcolare separatamente  $\langle \Psi | H_0 | \Psi \rangle$  e  $\langle \Psi | H_1 | \Psi \rangle$ , per poi sommare i risultati.

$$\begin{aligned} \langle \Psi | H_0 | \Psi \rangle &= \frac{1}{N!} \sum_{\{PP'\}} (-1)^{\{P+P'\}} \sum_{i=1}^N \langle \phi_1, \dots, \phi_N | P h(i) P' | \phi_1, \dots, \phi_N \rangle \\ &= \frac{1}{N!} (-1)^{\{P+P'\}} \sum_{i=1}^N \langle \phi_i | h(i) | \phi_i \rangle \delta_{\sigma\sigma'} \\ &= \sum_{i=1}^N \langle \phi_i | h(i) | \phi_i \rangle \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dove  $h(i)$  è l'operatore di singola particella  $i$ , definito come

$$h(i) = \frac{-\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + U^{ext}(i) \quad (2.24)$$

e la seconda uguaglianza è stata possibile grazie all'ortonormalità del determinante di Slater.

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | H_1 | \Psi \rangle &= \frac{1}{N!} \sum_{\{PP'\}} (-1)^{\{P+P'\}} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \langle \phi_1, \dots, \phi_N | P v(i, j) P' | \phi_1, \dots, \phi_N \rangle \\
&= \frac{1}{N!} (-1)^{\{P+P'\}} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \langle \phi_i \phi_j | v(i, j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle \delta_{\sigma\sigma'} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N \langle \phi_i \phi_j | v(i, j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Da cui

$$E[\Psi] = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \sum_i \langle \phi_i | h(i) | \phi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle \phi_i \phi_j | v(i, j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle \quad (2.26)$$

Si osservi che il termine di interazione contiene sia il termine diretto, che quello di scambio. Il segno negativo risulta dalla statistica di Fermi e cancella il termine di autointerazione quando  $i = j$ .

Per procedere alla minimizzazione di  $E[\phi_1, \dots, \phi_N]$  bisogna imporre l'ortogonalità e la normalizzazione delle funzioni d'onda di singola particella  $\phi_i$ . Pertanto, il funzionale  $E[\phi_1, \dots, \phi_N]$  che deve essere minimizzato è

$$E[\phi_1, \dots, \phi_N] = E[\Psi] - \sum_{i,j} \epsilon_{ij} (\langle \phi_i | \phi_j \rangle - \delta_{ij}) \quad (2.27)$$

dove  $\epsilon_{ij}$  è il coefficiente di Lagrange.

Facendo variare lo stato di singola particella  $\phi_i$  di una quantità infinitesima  $\delta\phi_i = \phi_i + \eta_i$ , si ottiene

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_i E[\phi_1, \dots, \phi_N] = E[\phi_1, \dots, \phi_i + \eta_i, \dots, \phi_N] - E[\phi_1, \dots, \phi_i, \dots, \phi_N] \\
&= \langle \eta_i | h(i) | \phi_i \rangle + \sum_j \langle \eta_i \phi_j | v(i, j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle - \epsilon_{ij} \langle \eta_i | \phi_j \rangle + c.c. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

arrivando così ad avere il sistema di N equazioni di Hartree-Fock

$$h(i) | \phi_i \rangle + \sum_{j=1}^N \langle \phi_j | v(i, j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle = \sum_{j=1}^N \epsilon_{ij} | \phi_j \rangle \quad (2.29)$$

Poiché ogni combinazione lineare delle soluzioni è anch'essa soluzione dell'equazione, è possibile scegliere un insieme di funzioni che diagonalizzino la matrice hermitiana  $\epsilon_{ij}$ . Pertanto, proiettando il sistema di N equazioni di Hartree-Fock sulla soluzione  $\phi_i$ , cioè moltiplicando a sinistra per  $\langle \phi_i |$  i termini dell'equazione (2.29), si ottiene la solita forma del sistema di equazioni di

Hartree-Fock

$$\epsilon_i = \langle \phi_i | h(i) | \phi_i \rangle + \sum_j \langle \phi_i \phi_j | v(i, j) | \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \rangle \quad (2.30)$$

che nello spazio delle coordinate assume la seguente forma:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_H \right\} \phi_i(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' U_{exch}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i \phi_i(\mathbf{r}) \quad (2.31)$$

Dove

$$U_H = \int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_j |\phi_j(\mathbf{r}')|^2 = \int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \quad (2.32)$$

è il potenziale di Hartree e

$$U_{exch}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_j \phi_j^*(\mathbf{r}') \phi_j(\mathbf{r}) = -v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \quad (2.33)$$

è il potenziale di scambio non locale, detto anche potenziale di Fock. La non località di questo termine è strettamente connessa al range d'interazione del potenziale a due corpi. Se si utilizza come forza una  $\delta$ , allora anche quest'ultimo termine diventa locale.

L'equazione (2.31) rappresenta un problema autoconsistente, in quanto il termine  $U_H$  e  $U_{exch}$  dipendono esplicitamente dalle funzioni d'onda  $\phi_j(\mathbf{r}')$  che sono sconosciute. Un modo per risolvere il sistema è quello di procedere per iterazione: si inizia con un insieme di funzioni d'onda di prova  $\phi_j(\mathbf{r}')$ , si risolve il sistema in funzione di  $\phi_i(\mathbf{r})$ , ottenendo così un nuovo set di autofunzioni; a questo punto, si prendono in considerazione le autofunzioni appena trovate, e si calcolano i nuovi potenziali di Hartree e Fock e si inseriscono in (2.31) risolvendo il nuovo sistema che ci permette trovare le nuove funzioni d'onda, iterando il procedimento sino a raggiungere l'autoconsistenza delle soluzioni. Si raggiunge l'autoconsistenza quando le funzioni d'onda non subiscono variazioni significative fra un'iterazione e la sua successiva.

### 2.3.2 Interazione di Gogny

Si tratta di un'interazione nucleare effettiva a range finito, a differenza della forza di Skyrme, che è a range nullo. Più precisamente, T.Skyrme formulò un potenziale d'interazione a raggio nullo, dipendente dalla densità del sistema. Come spiegato nell'articolo [Skyrme, 1958-1959], il termine a range nullo descrive l'interazione a due corpi e il termine dipendente dalla densità, è stato necessario la descrizione dell'interazione a tre corpi. Successivamente Brink e Boeker introdussero un potenziale a range finito, costituito dalla somma di due gaussiane [Brink and Boeker, 1967], in cui comparivano combinazioni

di operatori di scambio di coordinate, spin e isospin, come nel potenziale di Skyrme. Tuttavia tale modello non era in grado di riprodurre correttamente le energie di legame al livello di approssimazione di Hartree-Fock.

Gogny suggerì l'introduzione di altri due termini: uno dipendente dalla densità del sistema e l'altro riguardante l'interazione di spin-orbita. Infine, furono Dechargé e Gogny che ebbero l'idea di utilizzare sia la parte dipendente dalla densità del potenziale di Skyrme, che quello a range finito elaborato da Brink e Boeker, ottenendo così il potenziale seguente, detto di Gogny [Dechargé and Gogny, 1980]:

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{r}) = & \sum_{i=1,2} (W_i + B_i P_\sigma - H_i P_\tau - M_i P_\sigma P_\tau) e^{\frac{-r^2}{\mu_i^2}} \\
 & + \sum_{i=1,2} t_0^i (1 + x_0^i P_\sigma) \rho^{\alpha_i} \delta(\mathbf{r}) \\
 & + iW_0(\sigma_1 + \sigma_2)[\mathbf{k}' \times \delta(\mathbf{r})\mathbf{k}]
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Dove

$$P_\sigma = \frac{1 + \sigma_1 \sigma_2}{2} \tag{2.35}$$

e

$$P_\tau = \frac{1 + \tau_1 \tau_2}{2} \tag{2.36}$$

sono gli operatori  $P_\sigma$  e  $P_\tau$  sono, rispettivamente, gli operatori di spin e di isospin del nucleone.

Si tratta di un potenziale dato dalla somma di un potenziale centrale con un termine di spin-orbita. La forza centrale è costituita dai primi due termini che compaiono nell'equazione (2.34): uno indipendente dalla densità e l'altro dipendente dalla densità. Il termine indipendente dalla densità è costituito dalla somma di due gaussiane, e si rifà al potenziale elaborato da Brink e Boeker. In esso, il compito delle gaussiane è quello di simulare, l'una il comportamento a breve range della forza nucleare e, l'altra, il comportamento a range intermedio. Inoltre, nell'articolo originale [Dechargé and Gogny, 1980] è data spiegazione del fatto che la scelta delle funzioni gaussiane è stata assunta perché vantaggiosa a livello computazionale, quando si estende questo modello d'interazione allo studio dei nuclei deformati, poiché si può assumere come funzioni d'onda base, quelle dell'oscillatore armonico, semplificando notevolmente i calcoli. Il secondo termine è a range nullo e la dipendenza della densità  $\rho$  dall'esponente  $\alpha$ , serve per descrivere l'interazione di molti corpi tra un nucleone e gli altri costituenti il background nucleare. Il terzo termine contiene la componente di spin-orbita dei nucleoni, proporzionale a  $W_0$ , che dipende dal momento relativo  $\mathbf{k} = (\nabla_1 - \nabla_2)/2i$ . Infine le quantità

$W, B, H, M, t_0^i, x_0^i, \alpha_i, \mu_i$  sono parametri dell'interazione che vanno determinati imponendo delle condizioni in accordo con i dati sperimentali, una volta fissati i range d'interazione  $\mu_i$ . Questi ultimi, potrebbero essere a loro volta fissati ma, tradizionalmente, vengono fissati a mano.

Si conclude ribadendo che in questo elaborato, ci si restringerà allo studio di un caso particolare di interazione di Gogny: si considererà una gaussiana, anziché due, e si trascureranno i termini dipendenti dalla densità (il secondo termine che compare in (2.34)) e dallo spin dei nucleoni (l'ultimo termine che compare in (2.34)). Quest'ultimo termine non sarà tenuto in considerazione poiché si studierà la materia non polarizzata e, di conseguenza, sarà nullo.

## Capitolo 3

# Materia simmetrica

### 3.1 Introduzione

Si definisce materia nucleare simmetrica, un sistema ideale di materia nucleare infinita caratterizzato dall'aver densità neutronica  $\rho_n$  uguale a quella protonica  $\rho_p$  e costanti. Essendo un sistema infinito, consente di ignorare gli effetti di bordo dovuti alla superficie dei nuclei finiti. Inoltre quando si studia tale sistema, si trascurano le interazioni elettromagnetiche che a breve range, sono più deboli della forza nucleare e darebbero un contributo infinito all'energia del sistema poiché ci sarebbero infiniti protoni. Nonostante in natura non esista tale sistema, il suo studio riveste un ruolo importante, in quanto modella l'energia per particella all'interno dei nuclei stabili ( $N \approx Z$ ).<sup>1</sup>

### 3.2 Determinazione dell'equazione di stato

#### 3.2.1 Energia cinetica

Si consideri una scatola di volume  $\Omega$  e si ipotizzi che i nucleoni si comportino come particelle non interagenti, cioè come gas degenere di Fermi. Questa ultima assunzione è giustificata dal fatto che solo una piccola frazione di nucleoni possa essere eccitata. Imponendo le condizioni al contorno alla scatola e tenendo conto del fatto che il sistema è invariante per traslazione spaziale, quindi il momento è costante del moto, le autofunzioni che descrivono la materia simmetrica sono funzioni d'onda piane. Esse sono

$$\phi(k) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.1)$$

Si operi come si è soliti procedere quando si passa dall'analisi del discreto a quella del continuo, operando la seguente sostituzione:

---

<sup>1</sup>In prima approssimazione questo è vero perché i nucleoni, all'interno del nucleo, non risentono degli effetti della superficie. Questo è conseguenza del range finito d'interazione.

$$\sum_i \longrightarrow \frac{g\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad (3.2)$$

cioè rimpiazzando la somma sugli stati  $i$  di singola particella  $i$  con l'integrale sugli stati  $k$ , dove  $g$  è detto fattore di degenerazione.<sup>2</sup> Si osservi che tale limite è esatto nel caso di materia infinita. Nel caso della materia simmetrica  $g$  assume il valore 4, poiché si ha sia degenerazione di spin<sup>3</sup> che di isospin<sup>4</sup>, a differenza della materia neutronica che, come si vedrà nel capitolo seguente, presenterà solo degenerazione di spin, perciò  $g=2$ . Applicando il metodo di Hartree-Fock si ottiene che l'energia cinetica media del sistema è:

$$\langle T \rangle = \sum_i^{N_F} \langle i | T | i \rangle = \frac{4\Omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{\Omega} \int d^3k \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (3.3)$$

Integrando sugli stati che occupano la sfera di Fermi<sup>5</sup> e dividendo l'espressione trovata per  $A = \rho\Omega$ , cioè per il numero totale delle particelle presenti nel sistema di volume  $\Omega$ , si ottiene l'energia cinetica media per particella:

$$\langle t \rangle = \frac{\langle T \rangle}{\rho\Omega} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (3.4)$$

dove  $k_F = (\frac{3}{2}\pi^2\rho)^{\frac{1}{3}}$  è il momento di Fermi per la materia nucleare simmetrica.

### 3.2.2 Potenziale

In questa sezione verrà ricavata l'espressione del potenziale medio per singola particella per il potenziale di Gogny semplificato che, come già detto, ha la struttura del potenziale di Gogny (2.34), ma si differenzia da esso in quanto costituito da una sola gaussiana ed è privo dei termini dipendenti dalla densità e dallo spin dei nucleoni.

La trattazione relativa alla determinazione dell'espressione del potenziale, verrà suddivisa in 2 paragrafi: determinazione del termine diretto e di scambio.

Si consideri il seguente potenziale di interazione di Gogny semplificato fra due nucleoni, non dipendente dalla densità:

<sup>2</sup>Un'osservabile è detta degenerare quando ad ogni suo autovalore corrisponde più di un autostato.

<sup>3</sup>Lo spin  $\sigma$  di un fermione assume valore  $\pm 1/2$  a seconda che il fermione abbia spin up o down lungo la direzione  $\hat{z}$ .

<sup>4</sup>L'isospin  $\tau$  è un numero quantico che descrive lo stato di un nucleone ed assume valori  $\tau_{\pm} = \pm \frac{1}{2}$  a seconda che si tratti di un protone o di un neutrone.

<sup>5</sup>Si definisce sfera di Fermi nello spazio dei momenti  $\mathbf{K}$ , la sfera avente come raggio il momento di Fermi  $k_F$ .

$$V(\mathbf{r}) = (W + BP_\sigma - HP_\tau - MP_\sigma P_\tau) e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (3.5)$$

Per determinare l'espressione dell'elemento di matrice antisimmetrica del potenziale  $\langle ij|V(\mathbf{r})|ij\rangle_{AS}$  nell'equazione di Hartree-Fock<sup>6</sup>, esiste una procedura standard, che verrà adottata anche qui. Essa consiste nell'esprimere  $\langle ij|V(\mathbf{r})|ij\rangle_{AS}$  come

$$\langle ij|V(\mathbf{r})|ij\rangle_{AS} = \langle ij|V(\mathbf{r})(1 - P_{12})|ij\rangle \quad (3.6)$$

dove  $P_{12} = P_M P_\sigma P_\tau$ , con  $P_\tau$  e  $P_\sigma$  soliti operatori di isospin e spin e  $P_M$  operatore di scambio delle coordinate delle particelle<sup>7</sup>.

Si esplicitino ora gli operatori  $P_\sigma$ ,  $P_\tau$  usando le matrici di Pauli nello spazio di spin e di isospin:

$$P_\sigma = \frac{1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{2} \quad (3.7)$$

$$P_\tau = \frac{1 + \tau_1 \cdot \tau_2}{2}, \quad (3.8)$$

Poiché vale  $P_\tau^2 = P_\sigma^2 = P_M^2 = 1$ , si perviene così alla seguente espressione

$$\begin{aligned} \langle ij|V(\mathbf{r})|ij\rangle_{AS} &= \langle ij|V(\mathbf{r})(1 - P_{12})|ij\rangle \\ &= \langle ij|\left\{W + B\left(\frac{1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{2}\right) - H\left(\frac{1 + \tau_1 \cdot \tau_2}{2}\right) - M\left(\frac{1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{2}\right)\left(\frac{1 + \tau_1 \cdot \tau_2}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - [W\left(\frac{1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{2}\right)\left(\frac{1 + \tau_1 \cdot \tau_2}{2}\right)P_M + B\left(\frac{1 + \tau_1 \cdot \tau_2}{2}\right)P_M - H\left(\frac{1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{2}\right)P_M \right. \\ &\quad \left. - MP_M]\right\} \times e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} |ij\rangle \end{aligned} \quad (3.10)$$

Tenendo conto del fatto che  $\langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle = \langle \tau_1 \cdot \tau_2 \rangle = 0$ <sup>8</sup>, si perviene alla seguente equazione

$$\langle ij|V(\mathbf{r})|ij\rangle = \langle ij|\left[\left(W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4}\right) + \left(-\frac{W}{4} - \frac{B}{2} + \frac{H}{2} + M\right)P_M\right] e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} |ij\rangle \quad (3.11)$$

<sup>6</sup>Si veda capitolo 1.4.1.

<sup>7</sup> $P_M \phi_a(\mathbf{r}_1) \phi_b(\mathbf{r}_2) = \phi_a(\mathbf{r}_2) \phi_b(\mathbf{r}_1)$ .

<sup>8</sup>Qualitativamente si può spiegare questo risultato nel seguente modo: poiché si tratta di un sistema di materia infinita, mediamente si avrà la stessa probabilità di trovare un nucleone con spin up e uno con spin down; uno con isospin  $\tau_-$  e uno con isospin  $\tau_+$ . Per una dimostrazione matematica dettagliata si consulti [D.Vautherin and D.M.Brink, 1972].

**Termine diretto**

Il termine diretto è

$$\langle V_d(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{N_F} \langle ij | \left[ \left( W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4} \right) e^{-\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}{\mu^2}} | ij \rangle \right] \quad (3.12)$$

dove con  $N_F$  si è indicato il livello di Fermi.

Per effettuare questo calcolo si considerino come funzioni d'onda le onde piane

$$\phi_{k_1} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} \quad (3.13)$$

$$\phi_{k_2} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \quad (3.14)$$

la cui scelta, come è stato già detto, è giustificata dalle proprietà del sistema in esame. Per comodità di calcolo, si passi alle coordinate sferiche.

$$\begin{aligned} \langle V_d(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{ij}^{N_F} \langle ij | \left[ \left( W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4} \right) e^{-\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}{\mu^2}} | ij \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4} \right) \left( \frac{4\Omega}{(2\pi^3)} \right)^2 \int_{\Omega_F} \int_{\Omega_F} d_3 k_1 d_3 k_2 \\ &\quad \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}{\mu^2}} \frac{e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} d_3 r_1 d_3 r_2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

dove con  $\Omega_F$  si è indicato il volume della sfera di Fermi, cioè la sfera contenente tutti gli stati aventi energia minore dell'energia di Fermi definita come

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (3.16)$$

con

$$k_F = \left( \frac{6\pi^2}{g} \rho \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.17)$$

Si cambi ora il sistema di riferimento, cioè si effettui una separazione fra il moto del centro di massa e quello relativo tra due nucleoni, effettuando le seguenti trasformazioni sulle coordinate

$$\begin{cases} \mathbf{r} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{R} := \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \end{cases} \quad (3.18)$$

Osservando che  $\det|\mathbf{J}| = 1$ , dove  $\mathbf{J}$  è la matrice jacobiana della trasformazione in coordinate sferiche, si ottiene

$$\langle V_d(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \frac{16}{(2\pi)^6} \left( W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4} \right) \int_0^{k_F} 4\pi k_1^2 dk_1 \int_0^{k_F} 4\pi k_2^2 dk_2 \int_{\Omega} d_3 R \int_0^{\infty} e^{-\frac{|\mathbf{r}|^2}{\mu^2}} 4\pi r^2 dr \quad (3.19)$$

Si osservi ora che il termine  $d_3 R$  integrato dà un contributo di volume  $\Omega$  e il termine in  $d_3 r$  è un integrale gaussiano facile da calcolare, il cui risultato è

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{|\mathbf{r}|^2}{\mu^2}} 4\pi r^2 dr = \mu^3 \pi^{\frac{3}{2}} \quad (3.20)$$

Pertanto (3.19) diventa

$$\langle V_d(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \frac{4\Omega}{\pi^4} \frac{k_F^6}{9} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \left( W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4} \right) \quad (3.21)$$

Dividendo l'equazione (3.21) per  $A = \rho\Omega$ , cioè per il numero totale delle particelle presenti nel sistema di volume  $\Omega$  e, sostituendo a  $k_F$  la relazione (3.17) con  $g = 4$ , si ottiene il contributo diretto di energia per nucleone:

$$\langle v_d(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \rho A_0 \quad (3.22)$$

dove, per comodità di lettura, si è introdotto il parametro

$$A_0 = W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4} \quad (3.23)$$

Si osservi come il termine diretto dipenda fortemente dal range  $\mu$ . Inoltre, poiché dipende anche dalla densità  $\rho$ , ci si aspetta che possa rivestire un ruolo importante ad alte densità.

### Termine di scambio

Il termine di scambio è

$$\langle V_s(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{N_F} \langle ij | \left[ \left( -\frac{W}{4} - \frac{B}{2} + \frac{H}{2} + M \right) e^{-\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}{\mu^2}} \right] | ij \rangle \quad (3.24)$$

Operando come nel caso del termine diretto si giunge a

$$\begin{aligned}
\langle V_s(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{ij}^{N_F} \langle ij | \left[ \left( -\frac{W}{4} - \frac{B}{2} + \frac{H}{2} + M \right) \right] e^{-\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}{\mu^2}} | ij \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left( -\frac{W}{4} - \frac{B}{2} + \frac{H}{2} + M \right) \left( \frac{4\Omega}{(2\pi)^3} \right)^2 \int_{\Omega_F} \int_{\Omega_F} d_3 k_1 d_3 k_2 \\
&\quad \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}{\mu^2}} \frac{e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} d_3 r_1 d_3 r_2 \\
&= \frac{1}{2} \left( -\frac{W}{4} - \frac{B}{2} + \frac{H}{2} + M \right) \frac{1}{4\pi^6} \int_{\Omega_F} \int_{\Omega_F} d_3 k_1 d_3 k_2 \\
&\quad \int_{\Omega} \int_{\Omega} e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} e^{-\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}{\mu^2}} d_3 r_1 d_3 r_2 \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Si effettui ora il cambio del sistema di riferimento, separando cioè il moto del centro di massa dal moto relativo fra le particelle, applicando le trasformazioni (3.18), come nel caso del calcolo del termine diretto. Inoltre, si osservi per procedere con l'integrazione che

1. l'integrazione su  $\Omega$  in  $d_3 R$  dà al solito un contributo di volume.
2. Si noti che per risolvere l'integrale spaziale in  $d_3 r$ , basta completare il quadrato dell'esponente e risolvere l'integrale che si ottiene che è un integrale gaussiano:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} e^{-\frac{|\mathbf{r}|^2}{\mu^2}} d_3 r \\
&= \int_{\Omega} e^{-\left(\frac{\mathbf{r}}{\mu} + \frac{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mu}{2}\right)^2} e^{-\frac{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|^2 \mu^2}{4}} d_3 r \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Ponendo

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{\mu} + i \frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mu}{2}, \tag{3.27}$$

$$d_3 r = \mu^3 d_3 r' \tag{3.28}$$

facendo tendere all'infinito la regione d'integrazione  $\Omega$  ed usando le coordinate sferiche, si ottiene

$$\mu^3 \int_0^\infty r'^2 e^{-r'^2} e^{-\frac{q^2 \mu^2}{4}} d_3 r' = 4\pi \mu^3 \int_0^\infty r'^2 e^{-r'^2} e^{-\frac{q^2 \mu^2}{4}} dr' = \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 e^{-\frac{q^2 \mu^2}{4}} \tag{3.29}$$

Dove si è utilizzato il noto risultato

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \tag{3.30}$$

L'espressione (3.25) diventa allora

$$\langle V_s(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\Omega}{4\pi^6} \mu^3 \pi^{\frac{3}{2}} \left( -\frac{W}{4} - \frac{B}{2} + \frac{H}{2} + M \right) \int_{\Omega_F} \int_{\Omega_F} d_3 k_1 d_3 k_2 e^{-\frac{(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mu^2}{4}} \quad (3.31)$$

Per calcolare l'integrale in  $d_3 k_1$ ,  $d_3 k_2$ , conviene cambiare il sistema di riferimento anche per i momenti:

$$\mathbf{q} := \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \quad (3.32)$$

$$\mathbf{K} := \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \quad (3.33)$$

Dove  $\mathbf{K}$  è il momento del centro di massa e  $\mathbf{q}$  è il momento relativo fra i due nucleoni. Il determinante della trasformazione è sempre unitario. Tuttavia, cambia la regione di integrazione  $\Omega_F$ ; infatti essa deve essere determinata imponendo le seguenti condizioni:

$$D = \begin{cases} |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{K} + \frac{1}{2}\mathbf{q}| < k_F \\ |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{K} - \frac{1}{2}\mathbf{q}| < k_F \end{cases} \quad (3.34)$$

La regione che si viene così a creare è il volume di intersezione fra le due sfere di Fermi entrambe di raggio  $k_F$ .<sup>9</sup>

Applicando l'equazione (A.3)<sup>10</sup> in questo contesto, dove  $d = q$ ,  $r = k_F$ , si ha che l'integrale in  $d_3 K$  dà luogo al seguente risultato:

$$V_{\cap} := \frac{4\pi}{3} k_F^3 \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{q}{2k_F} + \frac{1}{2} \left( \frac{q}{2k_F} \right)^3 \right] \quad (3.35)$$

Per procedere col calcolo di (3.25) si introducano, per comodità, i seguenti parametri:

$$t = \mu k_F, \quad (3.36)$$

$$x = \frac{|\mathbf{q}|}{2k_F} \quad (3.37)$$

e si sfruttino i seguenti risultati, ottenuti integrando per parti:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x^2 k_F^2 \mu^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\mu k_F) - 2\mu k_F e^{-k_F^2 \mu^2}}{4k_F^3 \mu^3} \quad (3.38)$$

---

<sup>9</sup>Per dettagli sulla determinazione del volume di intersezione fra due sfere, si veda l'appendice.

<sup>10</sup>Si veda l'appendice.

$$\int_0^1 x^3 e^{-x^2 k_F^2 \mu^2} dx = \frac{e^{-k_F^2 \mu^2} (-k_F^2 \mu^2 + e^{k_F^2 \mu^2} - 1)}{2\mu^4 k_F^4} \quad (3.39)$$

$$\int_0^1 x^5 e^{-x^2 k_F^2 \mu^2} dx = \frac{2 - e^{-k_F^2 \mu^2} (k_F^4 \mu^4 + 2k_F^2 \mu^2 + 2)}{2\mu^6 k_F^6} \quad (3.40)$$

Dove la funzione  $erf(\mu k_F)$  è la funzione matematica error function definita come

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2} \quad (3.41)$$

Si giunge così ad ottenere il seguente risultato

$$\begin{aligned} \langle V_s(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\Omega}{4\pi^6} \mu^3 \pi^{\frac{3}{2}} \left( -\frac{W}{4} - \frac{B}{2} + \frac{H}{2} + M \right) \int_D \int_D d_3 K d_3 q e^{-\frac{|\mathbf{q}|^2 \mu^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Omega}{4\pi^6} \mu^3 \pi^{\frac{3}{2}} 32 \frac{4}{3} \pi^2 k_F^6 \left( -\frac{W}{4} - \frac{B}{2} + \frac{H}{2} + M \right) \int_0^1 (x^2 - \frac{3}{2} x^3 + \frac{1}{2} x^5) e^{-x^2 k_F^2 \mu^2} dx \end{aligned} \quad (3.42)$$

Sfruttando ora (3.38), (3.39), (3.40), e usando la definizione  $t = \mu k_F$  si ottiene

$$\begin{aligned} \langle V_s(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{\Omega}{4\pi^6} \mu^3 \pi^{\frac{3}{2}} 32 \frac{4}{3} \pi^2 k_F^3 t^3 \left( -\frac{W}{4} - \frac{B}{2} + \frac{H}{2} + M \right) \\ &\quad \left( \sqrt{\pi} \frac{erf(t)}{4t^3} + \frac{1}{2t^6} - \frac{3}{4t^4} + e^{-t^2} \left( \frac{1}{4t^4} - \frac{1}{2t^6} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Infine, dividendo per  $A = \rho\Omega$  e sostituendo al posto di  $k_F$  la sua espressione per la materia simmetrica, ossia  $k_F = (\frac{3}{2}\pi^2\rho)^{\frac{1}{3}}$ , si giunge ad ottenere il contributo energetico per nucleone:

$$\langle v_s(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} B_0 g(\mu, k_F), \quad (3.44)$$

Dove

$$g(t) = \sqrt{\pi} erf(t) + \frac{2}{t^3} - \frac{3}{t} + e^{-t^2} \left( \frac{1}{t} - \frac{2}{t^3} \right), \quad (3.45)$$

E si è introdotto il parametro  $B_0$  per comodità di lettura, così definito:

$$B_0 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} (W + 2B - 2H - 4M) \quad (3.46)$$

### 3.2.3 Equazione di stato per la materia simmetrica

Combinando insieme l'espressione dell'energia cinetica (4.2), l'espressione del contributo diretto (3.22), e quella per il contributo di scambio (3.46), si ottiene l'equazione di stato (energia per particella) per la materia nucleare simmetrica:

$$e_s(\rho) = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_N} + \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 A_0 \rho + \frac{1}{2} B_0 g(\mu k_F) \quad (3.47)$$

Si osservi che l'equazione di stato è indipendente dal volume, come deve essere, in quanto l'energia di legame per particella è costante.

## Capitolo 4

# Materia neutronica pura

### 4.1 Introduzione

Si definisce materia nucleare neutronica pura, un sistema ideale di materia nucleare infinita costituito soltanto da neutroni, ottenuto a partire dalla materia simmetrica, per mezzo della conversione di tutti i protoni, in essa presenti, in neutroni. L'energia per particella, necessaria per passare dalla materia simmetrica a quella neutronica, convertendo tutti i protoni presenti nella materia simmetrica, in neutroni, è detta energia di simmetria e si indica con la lettera  $S(\rho)$ <sup>1</sup>. Tale sistema non esiste in natura, sebbene esistano degli oggetti molto simili che sono le stelle di neutroni. Elaborando modelli matematici che descrivono il comportamento della materia neutronica, e applicando i risultati da essi derivanti, è possibile indagare le proprietà medie macroscopiche delle stelle di neutroni, come per esempio la pressione, la densità, stimarne il raggio e la massa. In questo capitolo verrà ricavata l'equazione di stato per il modello matematico di materia nucleare puramente neutronica, preso in considerazione in questo elaborato. Per la determinazione dell'equazione di stato verrà applicato il metodo di Hartree-Fock, in maniera analoga a quanto fatto per la materia simmetrica.

### 4.2 Determinazione dell'equazione di stato per la materia neutronica pura

#### 4.2.1 Energia cinetica

Procedendo nello stesso modo in cui si è operato nel capitolo precedente, con la unica eccezione che il fattore di degenerazione  $g$  nella relazione (3.17) assume ora il valore 2, si ottiene la seguente espressione per l'energia cinetica del sistema:

---

<sup>1</sup>Con buona accuratezza  $S(\rho)$  può essere stimata come la differenza fra l'EOS della materia neutronica pura e quella simmetrica:  $S(\rho) \approx e_n(\rho) - e_s(\rho)$ .

$$\langle T \rangle = \sum_i^{N_F} \langle i | T | i \rangle = \frac{4\Omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{\Omega} \int d^3k \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left( \frac{-\hbar^2}{2m_N} \nabla^2 \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.1)$$

Integrando sugli stati che occupano la sfera di Fermi e dividendo l'espressione trovata per  $A = \rho\Omega$ , cioè per il numero totale delle particelle presenti nel sistema di volume  $\Omega$ , si ottiene l'energia cinetica media per particella:

$$\langle t \rangle = \frac{\langle T \rangle}{\rho\Omega} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{F^n}^2}{2m_N} \quad (4.2)$$

Dove  $k_{F^n}$  si è indicato il momento di Fermi per la materia neutronica e vale:

$$k_{F^n} = (3\pi^2\rho)^{\frac{1}{3}} \quad (4.3)$$

Si richiama all'attenzione il fatto che la relazione che lega il momento di Fermi alla densità del sistema per la materia neutronica, è diversa da quella che lega il momento di Fermi alla densità del sistema per la materia simmetrica. Infatti per la materia neutronica  $k_{F^n} = (3\pi^2\rho)^{\frac{1}{3}}$ , mentre per quella simmetrica  $k_F = (\frac{3}{2}\pi^2\rho)^{\frac{1}{3}}$ . Questo perché l'espressione generica che lega il momento di Fermi alla densità del sistema, in generale è data da

$$k_{F_g} = \left( \frac{6\pi^2}{g} \rho \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.4)$$

dove  $g$  è il fattore di degenerazione del sistema. Come è già stato detto, nel caso della materia neutronica  $g$  vale 2, perché si ha solo degenerazione di spin, poiché si è in presenza solo di neutroni.

#### 4.2.2 Potenziale

In questa sezione verrà ricavata l'espressione del potenziale medio per singola particella per una forma specifica di potenziale di Gogny: una sola gaussiana, come operato con la materia simmetrica. Inoltre la trattazione verrà suddivisa in due sotto-sezioni: determinazione del termine diretto e di scambio.

Si consideri il solito potenziale di interazione di Gogny semplificato fra due nucleoni, non dipendente dalla densità:

$$V(\mathbf{r}) = (W + BP_\sigma - HP_\tau - MP_\sigma P_\tau) e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (4.5)$$

Poiché per la materia neutronica  $P_\tau = 1$ , l'espressione (4.18) diventa

$$V(\mathbf{r}) = (W + BP_\sigma - H - MP_\sigma) e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (4.6)$$

Si applichi la consueta procedura per ricavare l'elemento di matrice antisimmetrica del potenziale  $\langle ij | V(\mathbf{r}) | ij \rangle_{AS}$ :

$$\langle ij|V(\mathbf{r})|ij\rangle_{AS} = \langle ij|V(\mathbf{r})(1 - P_{12})|ij\rangle \quad (4.7)$$

Dove  $P_{12} = P_M P_\sigma^2$ , con  $P_\sigma$  operatore di scambio di spin e  $P_M$  operatore di scambio delle coordinate delle particelle<sup>3</sup>. Esplicitando ora l'operatore  $P_\sigma$ , usando le matrici di Pauli nello spazio di spin:

$$P_\sigma = \frac{1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{2}, \quad (4.8)$$

tenendo conto che  $P_\sigma^2 = P_\tau^2 = P_M^2$ , si ottiene così la seguente espressione

$$\begin{aligned} & \langle ij|V(\mathbf{r})|ij\rangle_{AS} \\ &= \langle ij|V(\mathbf{r})(1 - P_{12})|ij\rangle \\ &= \langle ij|\left\{W + B\left(\frac{1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{2}\right) - H - M\left(\frac{1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \left[W\left(\frac{1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{2}\right)P_M + BP_M - H\left(\frac{1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{2}\right)P_M \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - MP_M\right]\right\} \times e^{\frac{-r^2}{\mu^2}}|ij\rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

Tenendo conto del fatto che  $\langle \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \rangle = 0^4$ , si perviene alla seguente equazione

$$\langle ij|V(\mathbf{r})|ij\rangle = \langle ij|\left[\left(W + \frac{B}{2} - H - \frac{M}{2}\right) + \left(-\frac{W}{2} - B + \frac{H}{2} + M\right)P_M\right]e^{\frac{-r^2}{\mu^2}}|ij\rangle \quad (4.11)$$

Nella procedura di calcolo si separerà la trattazione relativa al termine diretto da quella relativa al termine di scambio.

### Termine diretto

Il termine diretto è

$$\langle V_d(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{N_{F^n}} \langle ij|\left[\left(W + \frac{B}{2} - H - \frac{M}{2}\right)\right]e^{\frac{-|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}{\mu^2}}|ij\rangle \quad (4.12)$$

Dove con  $N_{F^n}$  si è indicato il livello di Fermi per la materia neutronica.

<sup>2</sup> $P_{12} = P_M P_\sigma P_\tau$ , ma  $P_\tau = 1$  per la materia neutronica.

<sup>3</sup> $P_M \phi_a(\mathbf{r}_1) \phi_b(\mathbf{r}_2) = \phi_a(\mathbf{r}_2) \phi_b(\mathbf{r}_1)$ .

<sup>4</sup>Qualitativamente si può spiegare questo risultato nel seguente modo: poiché si tratta di un sistema di materia infinita, mediamente si avrà la stessa probabilità di trovare un nucleone con spin up e uno con spin down. Per una dimostrazione matematica dettagliata si consulti l'articolo[D.Vautherin and D.M.Brink, 1972].

Il modo di operare è esattamente uguale a quello utilizzato in 3.2.2. L'unica cosa che differisce nel calcolo, a parte le costanti numeriche moltiplicative dei parametri  $W$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $M$ , è il fattore di degenerazione  $g$ , che assume il valore 2, e la relazione fra momento di Fermi e densità del sistema, che abbiamo visto essere (4.3).

Quindi, assumendo come funzioni d'onda le seguenti onde piane

$$\phi_{k_1} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} \quad (4.13)$$

$$\phi_{k_2} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2}, \quad (4.14)$$

e operando in coordinate sferiche per comodità, si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle V_d(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{ij}^{N_{F^n}} \langle ij | \left[ \left( W + \frac{B}{2} - H - \frac{M}{2} \right) \right] e^{-\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}{\mu^2}} | ij \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left( W + \frac{B}{2} - H - \frac{M}{2} \right) \left( \frac{2\Omega}{(2\pi^3)} \right)^2 \int_{\Omega_{F^n}} \int_{\Omega_{F^n}} d_3 k_1 d_3 k_2 \\ &\quad \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}{\mu^2}} \frac{e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1}}{\sqrt{\Omega}} \frac{e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2}}{\sqrt{\Omega}} d_3 r_1 d_3 r_2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dove con  $\Omega_{F^n}$  si è indicato il volume della sfera di Fermi, cioè la sfera contenente tutti gli stati aventi energia minore dell'energia di Fermi definita come

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_{F^n}^2}{2m_N} \quad (4.16)$$

con  $m_N = 939 \text{ MeV}/c^2$  massa del nucleone.

Si cambi ora il sistema di riferimento, cioè si effettui una separazione fra il moto del centro di massa e quello relativo tra due nucleoni, effettuando le seguenti trasformazioni sulle coordinate

$$\begin{cases} \mathbf{r} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{R} := \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \end{cases} \quad (4.17)$$

Osservando che  $\det|\mathbf{J}| = 1$ , dove  $\mathbf{J}$  è la matrice jacobiana della trasformazione in coordinate sferiche, si ottiene

$$\begin{aligned} \langle V_d(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \frac{4}{(2\pi)^6} \left( W + \frac{B}{2} - H - \frac{M}{2} \right) \int_0^{k_{F^n}} 4\pi k_1^2 dk_1 \int_0^{k_{F^n}} 4\pi k_2^2 dk_2 \\ &\quad \int_{\Omega} d_3 R \int_0^{\infty} e^{-\frac{|\mathbf{r}|^2}{\mu^2}} 4\pi r^2 dr \end{aligned} \quad (4.18)$$

Si osservi ora che il termine  $d_3 R$  integrato dà un contributo di volume  $\Omega$  e il termine in  $d_3 r$  è un integrale gaussiano facile da calcolare, il cui risultato è

$$\int_0^\infty e^{-\frac{|\mathbf{r}|^2}{\mu^2}} 4\pi r^2 dr = \mu^3 \pi^{\frac{3}{2}} \quad (4.19)$$

Pertanto (4.18) diventa

$$\langle V_d(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\pi^4} \frac{k_{Fn}^6}{9} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 (W + \frac{B}{2} - H - \frac{M}{2}) \quad (4.20)$$

Dividendo l'equazione (4.20) per  $A = \rho\Omega$ , cioè per il numero totale delle particelle presenti nel sistema di volume  $\Omega$ , e sostituendo a  $k_{Fn}$  la relazione (4.3), si ottiene il contributo diretto di energia per nucleone:

$$\langle v_d(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \rho A_1 \quad (4.21)$$

Dove il termine  $A_1$  è definito come

$$A_1 = W + \frac{B}{2} - H - \frac{M}{2} \quad (4.22)$$

### Termine di scambio

Il termine di scambio è

$$\langle V_{sn}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{N_{Fn}} \langle ij | \left[ \left( -\frac{W}{2} - B + \frac{H}{2} - M \right) e^{-\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}{\mu^2}} | ij \right] \quad (4.23)$$

Operando come nel caso della materia simmetrica, si giunge a

$$\begin{aligned} \langle V_{sn}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\Omega}{16\pi^6} \mu^3 \pi^{\frac{3}{2}} \left( -\frac{W}{2} - B + \frac{H}{2} + M \right) \int_D \int_D d_3 K d_3 q e^{-\frac{|\mathbf{q}|^2 \mu^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Omega}{16\pi^6} \mu^3 \pi^{\frac{3}{2}} 32 \frac{4}{3} \pi^2 k_{Fn}^6 \left( -\frac{W}{2} - B + \frac{H}{2} + M \right) \\ &\quad \int_0^1 \left( x^2 - \frac{3}{2} x^3 + \frac{1}{2} x^5 \right) e^{-x^2 k_{Fn}^2 \mu^2} dx \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sfruttando ora (3.38), (3.39), (3.40), e usando la definizione  $t = \mu k_{Fn}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \langle V_{sn}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{\Omega}{16\pi^6} \mu^3 \pi^{\frac{3}{2}} 32 \frac{4}{3} \pi^2 k_{Fn}^3 t^3 \left( -\frac{W}{2} - B + \frac{H}{2} + M \right) \\ &\quad \left( \sqrt{\pi} \frac{erf(t)}{4t^3} + \frac{1}{2t^6} - \frac{3}{4t^4} + e^{-t^2} \left( \frac{1}{4t^4} - \frac{1}{2t^6} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Infine, dividendo per  $A = \rho\Omega$  e sostituendo al posto di  $k_{F^n}$  l'espressione (4.3), si giunge ad ottenere il contributo energetico per neutrone:

$$\langle v_{sn}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} B_1 g(\mu k_{F^n}), \quad (4.26)$$

Dove

$$g(t) = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(t) + \frac{2}{t^3} - \frac{3}{t} + e^{-t^2} \left( \frac{1}{t} - \frac{2}{t^3} \right), \quad (4.27)$$

E si è introdotto il parametro  $B_1$  per comodità di lettura, così definito:

$$B_1 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}(W + 2B - H - 2M) \quad (4.28)$$

### 4.2.3 Equazione di stato per la materia neutronica

Mettendo insieme i vari contributi energetici dati dalle equazioni (4.2), (4.21), (4.26), si giunge alla seguente equazione

$$e_n(\rho) = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{F^n}^2}{2m_N} + \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 A_1 \rho + \frac{1}{2} B_1 g(\mu k_{F^n}) \quad (4.29)$$

## Capitolo 5

# Proprietà della materia nucleare e risultati ottenuti

Questo capitolo sarà strutturato in due parti: nella prima, verranno menzionate le proprietà della materia nucleare e verranno date le rispettive definizioni. Nella seconda parte verranno presentati i risultati ottenuti, sfruttando le proprietà nucleari sia per la materia nucleare simmetrica, che per quella puramente neutronica.

### 5.1 Proprietà

Le proprietà macroscopiche della materia nucleare simmetrica, in corrispondenza del punto di saturazione  $\rho_0$ , spesso sono usate per caratterizzare le proprietà di un modello o per determinare i parametri che descrivono l'interazione efficace fenomenologica fra i nucleoni. Le proprietà che verranno menzionate sono quelle che poi verranno utilizzate per determinare i parametri dell'interazione di Gogny semplificata, presa in esame in questo lavoro.

1. Densità di saturazione  $\rho_0$ :

il valore numerico della densità di saturazione per la materia infinita, viene dedotto dalla densità interna dei nuclei finiti aventi ( $N \approx Z$ ), la quale viene misurata sperimentalmente mediante scattering elastici nucleo-elettrone, oppure nucleo-nucleone. Il valore utilizzato comunemente è

$$\rho_0 = 0.16 \pm 0.02 \text{ nucleoni/fm}^3 \quad (5.1)$$

2. Equazione di stato in corrispondenza del punto di saturazione  $\rho_0$ : sperimentalmente si trova che l'energia di legame della materia nucleare simmetrica, valutata in corrispondenza della densità di saturazione  $\rho_0$ , vale:

$$e_s(\rho_0) = -16 \pm 1 \text{ MeV} \quad (5.2)$$

3. Pressione: è definita nel seguente modo

$$P(\rho) = \rho^2 \frac{\partial e_s(\rho)}{\partial \rho} \quad (5.3)$$

e indica la pendenza della curva nell'equazione di stato della materia nucleare simmetrica  $e_s(\rho)$  al variare della densità. Poiché essa è proporzionale alla derivata prima dell'equazione di stato della materia simmetrica e, siccome tale funzione nel punto di saturazione  $\rho_0$  ammette un minimo<sup>1</sup>, ne segue che anche la pressione si annulla nel punto di saturazione  $\rho_0$

$$P(\rho_0) = \rho_0^2 \left. \frac{\partial e_s(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} = 0 \quad (5.4)$$

4. Modulo di incompressibilità: è definito come la derivata seconda dell'energia per particella, nel caso della materia simmetrica, rispetto alla densità, calcolata in corrispondenza del punto di saturazione  $\rho_0$

$$K_\infty = 9\rho_0^2 \left. \frac{\partial^2 e_s(\rho)}{\partial \rho^2} \right|_{\rho_0} \quad (5.5)$$

e dà pertanto informazioni sulla curvatura del grafico dell'energia per particella.

Questa quantità è importante per lo studio delle supernove e delle collisioni tra ioni pesanti. Il valore sperimentale di questa grandezza assume un valore numerico intorno ai 240 MeV e può essere dedotto dai risultati ottenuti sperimentalmente studiando la risonanza di monopol gigante nei nuclei finiti. Col termine di risonanza gigante si intendono gli stati collettivi di eccitazione del nucleo, aventi energie intorno alle decine di MeV superiori rispetto allo stato fondamentale.

5. Energia di simmetria: Per capire l'origine di questa grandezza fisica, è necessario partire dall'equazione di stato (EOS) della materia nucleare asimmetrica. L'energia di legame per nucleone nella materia nucleare asimmetrica, con densità protonica  $\rho_p$  e densità neutronica  $\rho_n$ , può

---

<sup>1</sup>Lo stato di minima energia è un punto di equilibrio stabile per la materia nucleare infinita.

essere espressa come espansione in serie di Taylor nel parametro di asimmetria di isospin, indicato con  $\delta$  e definito come

$$\delta = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho_p + \rho_n} \quad (5.6)$$

Arrestando l'espansione al secondo ordine in  $\delta$ , l'energia per unità di nucleone di un sistema asimmetrico a temperatura  $T = 0$ , può essere espressa nel modo seguente

$$e(\rho, \delta) = e(\rho, \delta = 0) + S(\rho)\delta^2 + O(\delta^4) \quad (5.7)$$

dove  $e(\rho, \delta = 0)$  è l'energia di legame per nucleone della materia nucleare simmetrica e

$$S(\rho) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 e(\rho, \delta, T)}{\partial \delta^2} \right) \Big|_{\delta=0} \quad (5.8)$$

è l'energia di simmetria nucleare. L'assenza dei termini dispari in  $\delta$  nell'espansione (5.7), è dovuta alla simmetria di scambio fra protone e neutrone nella materia nucleare, quando viene trascurata l'interazione di Coulomb ed è assunta valere l'indipendenza dalla carica della forza nucleare. Dai dati sperimentali emerge che i termini di ordine superiore al secondo sono trascurabili, almeno intorno alla densità di saturazione della materia simmetrica. Ne consegue che l'energia di simmetria approssimativamente possa essere espressa dalla seguente relazione

$$S(\rho) \approx e(\rho, \delta = 1) - e(\rho, \delta = 0), \quad (5.9)$$

dove  $e(\rho, \delta = 1)$  è l'energia di legame della materia nucleare puramente neutronica; mentre  $e(\rho, \delta = 0)$  è l'energia di legame della materia nucleare simmetrica. Infine, con le notazioni che si sono adottate in questo lavoro, l'approssimazione (5.9) assume la forma

$$S(\rho) \approx e_n(\rho) - e_s(\rho) \quad (5.10)$$

Dal punto di vista fisico, l'energia di simmetria è l'energia per nucleone necessaria per convertire tutti i protoni presenti nella materia nucleare simmetrica in neutroni, in modo tale da ottenere così la materia nucleare puramente neutronica.

Questa quantità riveste un ruolo cruciale in diversi ambiti della fisica: fisica nucleare, astrofisica, fisica del Modello Standard. In fisica nucleare l'energia di simmetria è importante per lo studio della distribuzione di neutroni in nuclei esotici e stabili, la comprensione della struttura degli isotopi rari, l'indagine di collisioni di ioni pesanti, nelle risonanze giganti e piccole, ecc. [Viñas]. In astrofisica l'energia di simmetria

è importante per comprendere le proprietà delle stelle di neutroni, delle esplosioni di supernove e per lo studio della nucleosintesi. Infine, è rilevante per l'indagine della non conservazione della parità delle osservabili coinvolte nei test a bassa energia del Modello Standard. [Viñas]

Mentre sono stati compiuti progressi significativi recentemente nel determinare il valore di questa quantità al di sotto e intorno alla densità di saturazione, rimane ancora molto lavoro da svolgere per quanto riguarda la sua determinazione quantitativa sopra la densità di saturazione [Chen et al., 2014b].

È inoltre possibile espandere in serie di Taylor l'energia di simmetria  $S(\rho)$  intorno alla densità di saturazione  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$  ottenendo la seguente espressione

$$S(\rho) \simeq J + \frac{L}{3\rho_0}(\rho - \rho_0) + \frac{K_{sym}}{18\rho_0^2}(\rho - \rho_0)^2, \quad (5.11)$$

Dove la quantità

$$J := S(\rho_0) \quad (5.12)$$

è chiamato coefficiente di energia di simmetria.

La grandezza fisica  $J$  assume un valore compreso fra i 30 e i 35 MeV. Questo valore numerico proviene dai dati sperimentali derivanti dalle masse nucleari, reazioni di nuclei pesanti, risonanze giganti e dalle proprietà osservabili delle stelle di neutroni. Questi valori sono predetti molto bene anche dai modelli nucleare di campo medio [Viñas].

Il parametro

$$L(\rho_0) := 3\rho_0 \left. \frac{\partial S(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \quad (5.13)$$

è chiamato parametro di pendenza e verrà spiegato a seguire. Mentre

$$K_{sym} := 9\rho_0^2 \left. \frac{\partial^2 S(\rho)}{\partial \rho^2} \right|_{\rho_0} \quad (5.14)$$

è chiamato parametro di curvatura. Entrambi i parametri caratterizzano la dipendenza dell'energia di simmetria dalla densità.

6. Parametro di pendenza: esso è definito come

$$L(\rho) := 3\rho_0 \left. \frac{\partial S(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \quad (5.15)$$

e risulta essere il primo termine dello sviluppo in serie di Taylor di  $S(\rho)$ . Quindi, matematicamente, risulta essere la pendenza della curva  $S(\rho)$ , in un grafico  $S - \rho$ , nell'intorno di  $\rho_0$ . Questa grandezza fisica, sperimentalmente, assume valori compresi fra i 40 MeV e i 90 MeV.

7. Massa efficace: si tratta di una proprietà di particella singola. Essa esprime la massa che ha una particella quando si muove all'interno di un campo di forze generato da altre particelle, in approssimazione di particella libera. Per ricavarla, si uguaglia la trasformata di Fourier dell'equazione di *Schrödinger* del sistema con la trasformata di Fourier dell'hamiltoniana di particella libera, avente come massa  $m^*$ .

$$\frac{\hbar^2}{2m_N}k^2 + U(k) = \frac{\hbar^2}{2m^*}k^2 \quad (5.16)$$

Derivando tale espressione rispetto a  $k$ , si ottiene la relazione per la massa efficace  $m^*$

$$\frac{m^*}{m_N} = \left[ 1 + \frac{m_N}{\hbar^2 k} \frac{\partial U(k)}{\partial k} \right]^{-1} \quad (5.17)$$

Si tratta ora di ricavare  $U(k)$ . In approssimazione di Hartree-Fock per calcolare  $U(k)$ , bisogna svolgere il seguente integrale

$$U(k) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma', \tau'} \int_{\Omega_k} \frac{d_3 k'}{(2\pi)^3} \langle k\sigma\tau; k'\sigma'\tau' | V | k\sigma\tau; k'\sigma'\tau' \rangle_{AS} \quad (5.18)$$

Questo calcolo risulta essere simile a quello svolto per calcolare l'equazione di stato del sistema, sia per la materia nucleare simmetrica che neutronica pura. Osserviamo che soltanto il termine di scambio dà un contributo, poiché i termini diretto e cinetico, non dipendono dal momento relativo  $k$ .

## 5.2 Determinazione dei parametri dell'interazione

Come si è visto nel capitolo 3.2.2, l'espressione del potenziale di Gogny semplificato per la materia simmetrica è

$$V(\mathbf{r}) = (W + BP_\sigma - HP_\tau - MP_\sigma P_\tau) e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (5.19)$$

Poiché nell'espressione (5.19) compaiono quattro parametri, è necessario trovare quattro condizioni da utilizzare per poter determinare tali parametri.

Visto che sono state determinate le EOS sia per la materia nucleare simmetrica, che per quella puramente neutronica, l'idea è quella di utilizzare tali quantità per determinare i parametri  $W$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $M$  che compaiono in (5.19). Chiaramente queste due quantità non bastano ai fini delle nostre intenzioni, in quanto, imponendo dei vincoli numerici su di esse, bisogna trovare almeno altre due condizioni da imporre affinché si abbia un sistema di quattro equazioni in quattro incognite. Si osservi che queste due grandezze fisiche da

trovare, devono essere tali da contenere nella loro espressione i parametri  $W$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $M$  e, inoltre, è necessario conoscere, con buona approssimazione, i valori sperimentali che esse assumono in corrispondenza di determinate densità. Queste grandezze fisiche possibili sono la pressione  $P(\rho)$ , il parametro  $L(\rho)$  e il modulo di incompressibilità  $K_\infty(\rho)$ . Le loro definizioni sono già state date nella sezione 5.1.

In questo lavoro sono state adottate due modalità di indagine.

Nel primo caso, sono state utilizzate due condizioni sulla materia nucleare simmetrica:

- EOS per la materia nucleare simmetrica  $e_s(\rho_0)$
- pressione  $P(\rho_0)$

e due sulla materia nucleare puramente neutronica:

- parametro di pendenza  $L(\rho_0)$
- EOS per la materia nucleare puramente neutronica  $e_n(\rho_0)$

Nel secondo caso, invece, si sono utilizzate tre condizioni sulla materia nucleare simmetrica:

- EOS per la materia nucleare simmetrica  $e_s(\rho_0)$
- pressione  $P(\rho_0)$
- modulo di incompressibilità  $K_\infty(\rho_0)$

e una sulla materia nucleare puramente neutronica:

- EOS per la materia nucleare puramente neutronica  $e_n(\rho_0)$

La trattazione verrà fatta separatamente per i due casi.

### **Determinazione dei parametri fissando il parametro di pendenza: primo caso**

Per ricavare i valori numerici dei parametri si sono utilizzate le grandezze fisiche viste nel "primo caso" e sono stati utilizzati i valori sperimentali che queste grandezze assumono in corrispondenza della densità  $\rho_0 = 0.16\text{fm}^{-3}$ . Mentre in letteratura sono riportati i valori dell'energia per particella per la materia simmetrica  $e_s(\rho_0)$ , e della pressione  $P(\rho_0)$ , non è riportato il valore dell'energia per particella della materia neutronica  $e_n(\rho_0)$ . Per ricavare il valore dell'energia per particella della materia neutronica  $e_n(\rho_0)$ , si è sfruttata la conoscenza del valore del coefficiente di simmetria  $J$ . Infatti, assumendo che valga l'espressione (5.10), conoscendo il valore sperimentale di  $J := S(\rho_0)$

e conoscendo il valore dell'equazione di stato per la materia simmetrica in corrispondenza della stessa densità  $e_s(\rho_0)$ , è possibile ottenere il valore dell'equazione di stato per la materia neutronica  $e_n(\rho_0)$ , semplicemente invertendo l'equazione (5.10) e valutandola in corrispondenza del punto di saturazione  $\rho_0$ . Inoltre, ci si è serviti del coefficiente di pendenza  $L(\rho)$ , utilizzando l'espressione che assume nel caso della materia nucleare neutronica. Infatti, assunto che valga la relazione (5.10) e, considerata la definizione di  $L(\rho)$  data nella relazione (5.15), è possibile trovare l'espressione di  $L(\rho)$  per il caso della materia nucleare neutronica:

$$L(\rho_0) \approx 3\rho_0 \left. \frac{\partial e_n(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}, \quad (5.20)$$

È doveroso sottolineare il fatto che sono stati utilizzati i valori sperimentali delle grandezze senza assumere le loro incertezze sperimentali.

Le proprietà utilizzate per la determinazione dei parametri W, B, H, M, sono quindi

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3} \\ S(\rho_0) = 32 \text{ MeV} \\ e_s(\rho_0) = -16 \text{ MeV} \\ P(\rho_0) = 0 \text{ MeV/fm}^3 \\ L(\rho_0) = 60 \text{ MeV} \end{cases} \quad (5.21)$$

Ma, come spiegato sopra,

$$S(\rho_0) \approx e_n(\rho_0) - e_s(\rho_0) = 32 \text{ MeV} \rightarrow e_n(\rho_0) = 32 \text{ MeV} - 16 \text{ MeV} = 16 \text{ MeV} \quad (5.22)$$

Il sistema di equazioni che è stato utilizzato per la determinazione dei parametri W, B, H, M risulta pertanto essere

$$\begin{aligned} e_s(\rho_0) &= \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_N} \Big|_{\rho_0} + \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \rho_0 \left( W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( W + 2B - 2H - 4M \right) g(\mu k_F) \Big|_{\rho_0} \\ &= -16 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} P(\rho_0) &:= \rho_0^2 \left. \frac{\partial e_s}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \\ &= \frac{2}{5} \frac{\hbar^2}{2m_N} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{-\frac{2}{3}} \Big|_{\rho_0} + \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \left( W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} (W + 2B - 2H - 4M) \left. \frac{\partial g(\mu k_F)}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \\ &= 0 \text{ MeV/fm}^3 \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned}
L(\rho_0) &:= 3\rho_0 \left. \frac{\partial e_n}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \\
&= \frac{6}{5} \frac{\hbar^2}{2m_N} \left( 3\pi^2 \right)^{\frac{2}{3}} \rho_0^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \left( W + \frac{B}{2} - H - \frac{M}{2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{W}{2} + B - \frac{H}{2} - M \right) \left. \frac{\partial g(\mu k_F)}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \\
&= 60 \text{ MeV}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
e_n(\rho_0) &= \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{F^n}^2}{2m_N} \Big|_{\rho_0} + \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \rho_0 \left( W + \frac{B}{2} - H - \frac{M}{2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{W}{2} + B - \frac{H}{2} - M \right) g(\mu k_{F^n}) \Big|_{\rho_0} \\
&= 16 \text{ MeV}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Tale sistema può essere risolto analiticamente.

Per quanto riguarda la risoluzione si è ricavata la matrice dei coefficienti analiticamente e si è implementato un programma utilizzando il software Mathematica sia per calcolare l'inversa della matrice, che per risolvere il sistema, utilizzando il metodo di Cramer. Nella risoluzione del sistema si sono usati i seguenti valori:  $m_N = 939 \text{ MeV}/c^2$ , massa del nucleone e  $\hbar c = 197.33 \text{ MeV fm}$ , con  $c$  velocità della luce nel vuoto.

I valori dei parametri ottenuti sono

| $\mu(\text{fm})$ | W(MeV)  | B(MeV)   | H(MeV)  | M (MeV)  |
|------------------|---------|----------|---------|----------|
| 0.6              | 5164.48 | -5103.04 | 5020.77 | -6248.32 |
| 0.7              | 2341.00 | -2388.51 | 2348.67 | -3040.57 |
| 0.8              | 1171.58 | -1239.51 | 1222.77 | -1653.88 |
| 0.9              | 631.344 | -695.295 | 692.087 | -981.367 |
| 1.0              | 359.937 | -414.09  | 419.262 | -624.691 |
| 1.1              | 214.238 | -258.321 | 268.916 | -421.464 |
| 1.2              | 131.711 | -166.990 | 181.216 | -298.659 |

Tabella 5.1: Valori dei parametri del potenziale di Gogny, al variare del range d'interazione  $\mu$

Si osservi che, all'aumentare del range d'interazione  $\mu$ , diminuiscono tutti i parametri W, B, H, M. Inoltre, i parametri W e H risultano essere sempre positivi; mentre i parametri B ed M, sempre negativi.

Per i valori riportati nella tabella 5.1, sono stati calcolati i valori di  $e_n(\rho_0), e_s(\rho_0), P(\rho_0), L(\rho_0), K(\rho_0)$  e vengono mostrati nella tabella sottostante. Tutti le grandezze sono misurate in MeV tranne P che è misurata in MeV/fm<sup>3</sup> e  $\mu$  in fm.

| $\mu(\text{fm})$ | $e_s(\text{MeV})$ | P                | L(MeV) | $e_n(\text{MeV})$ | $K_\infty(\text{MeV})$ |
|------------------|-------------------|------------------|--------|-------------------|------------------------|
| 0.6              | -16.00            | $-3.94210^{-13}$ | 60.00  | 16.00             | 270.05                 |
| 0.7              | -16.00            | -0.0003469       | 59.99  | 15.99             | 258.00                 |
| 0.8              | -16.00            | -0.0001419       | 59.99  | 15.99             | 244.76                 |
| 0.9              | -16.00            | $5.417410^{-6}$  | 60.00  | 16.00             | 230.59                 |
| 1.0              | -16.00            | $-2.565510^{-6}$ | 59.99  | 15.99             | 215.78                 |
| 1.1              | -15.99            | 0.0000574        | 60.00  | 16.00             | 200.57                 |
| 1.2              | -16.00            | $-7.859310^{-6}$ | 59.99  | 16.00             | 185.26                 |

Tabella 5.2: Valori delle proprietà della materia nucleare simmetrica, calcolate per valori di  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ , al variare del range  $\mu$

Come si evince dalla tabella 5.2, all'aumentare del range d'interazione  $\mu$ , si ha una diminuzione del valore di  $K_\infty$ , a parità di  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ . Probabilmente, all'aumentare del range, la dipendenza dell'energia di legame dalla densità si attenua<sup>2</sup> quindi, il sistema diventa meno compatto, perciò più comprimibile.

Nella figura 5.1 viene mostrato l'andamento del modulo di incompressibilità al variare del range  $\mu$ . Come si vede dal grafico, all'aumentare del range  $\mu$ , il modulo di incompressibilità decresce con un andamento lineare, in buona approssimazione.

Nella figura 5.2 viene rappresentato il grafico relativo all'andamento dell'energia per particella della materia neutronica in blu, e della materia simmetrica in rosso, per i valori riportati nella tabella 5.1 corrispondenti al valore  $\mu = 0.6 \text{ fm}$ . Si noti il punto di minimo del grafico dell'energia per particella della materia simmetrica, in corrispondenza del punto di densità di saturazione  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ , come ci si aspettava, in quanto la pressione nel punto di saturazione è nulla.

---

<sup>2</sup>Si noti che i valori dei parametri diminuiscono.

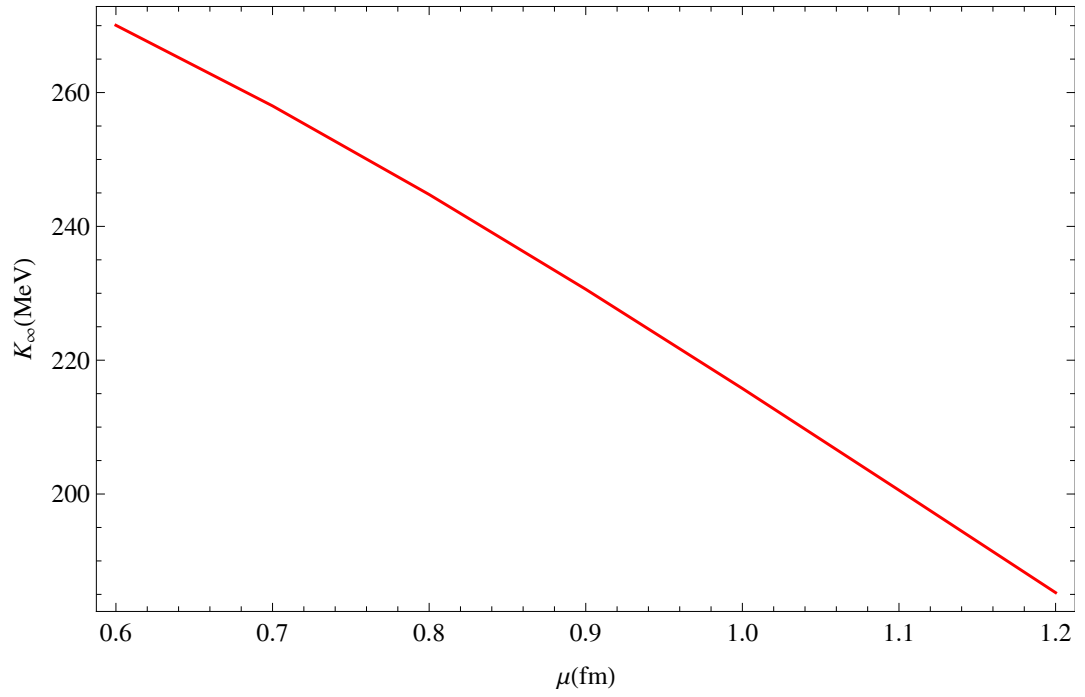


Figura 5.1: variazione del modulo di incompressibilità  $K_\infty$  al variare del range  $\mu$ .

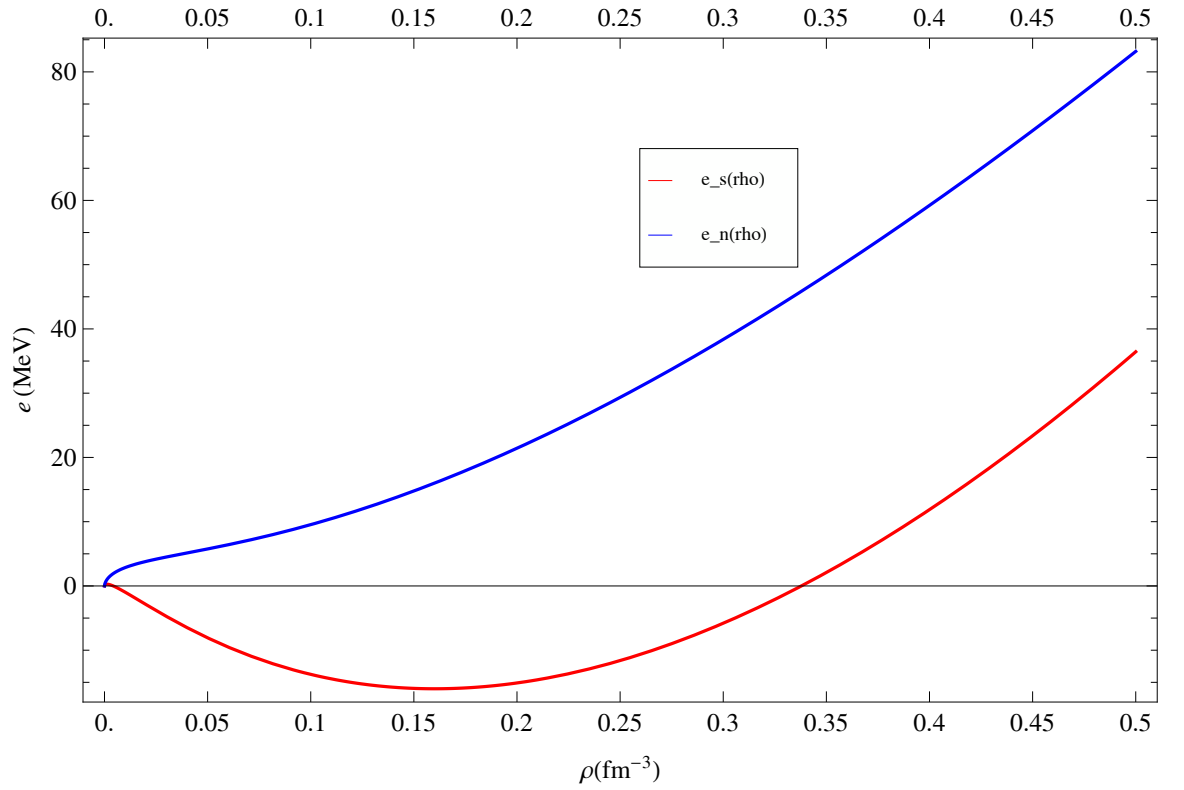


Figura 5.2: Equazione di stato per la materia simmetrica e neutronica al variare della densità, per valori dei parametri determinati in corrispondenza del valore  $\mu = 0.6$  fm

### Determinazione dei parametri fissando il modulo di incompressibilità: secondo caso

Per ricavare i valori numerici dei parametri si sono utilizzate le grandezze fisiche viste nel "secondo caso" e sono stati utilizzati i valori sperimentali che queste grandezze assumono in corrispondenza della densità  $\rho_0 = 0.16 \text{fm}^{-3}$ . I valori utilizzati sono quelli che si ritrovano in letteratura. È doveroso sottolineare il fatto che si è assunto che i valori sperimentali delle grandezze non siano affetti da incertezze. Fatte queste premesse, il sistema di equazioni che è stato utilizzato per la determinazione dei parametri  $W$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $M$  risulta pertanto essere

$$\begin{aligned} e_s(\rho_0) &= \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_N} \Big|_{\rho_0} + \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \rho_0 \left( W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( W + 2B - 2H - 4M \right) g(\mu k_F) \Big|_{\rho_0} \\ &= -16 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} P(\rho_0) &:= \rho_0^2 \frac{\partial e_s}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} \\ &= \frac{2}{5} \frac{\hbar^2}{2m_N} \left( \frac{3\pi^2}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{-\frac{2}{3}} \Big|_{\rho_0} + \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \left( W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( W + 2B - 2H - 4M \right) \frac{\partial g(\mu k_F)}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} \\ &= 0 \text{ MeV/fm}^3 \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} K_\infty(\rho_0) &:= 9\rho_0^2 \frac{\partial^2 e_s}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho_0} \\ &= 9\rho_0^2 \left[ \left( \frac{-2}{15} \right) \frac{\hbar^2}{2m_N} \left( \frac{3}{2} \pi^2 \right)^{\frac{2}{3}} \rho_0^{-\frac{4}{3}} - \frac{W}{2\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2 g(\mu k_F)}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{B}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2 g(\mu k_F)}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho_0} + \frac{H}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2 g(\mu k_F)}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho_0} + \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2 g(\mu k_F)}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho_0} \right] \\ &= 240 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} e_n(\rho_0) &= \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{F^n}^2}{2m_N} \Big|_{\rho_0} + \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \rho_0 \left( W + \frac{B}{2} - H - \frac{M}{2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{W}{2} + B - \frac{H}{2} - M \right) g(\mu k_{F^n}) \Big|_{\rho_0} \\ &= 16 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Questo sistema risulta essere non risolubile, infatti il determinante della matrice dei coefficienti è nullo.

Pertanto significa che  $K_\infty(\rho)$  risulta essere combinazione lineare delle altre equazioni.

### 5.2.1 Valori sperimentali utilizzati per la determinazione dei parametri per la materia neutronica

Studiando la materia neutronica, ci si è resi conto che il potenziale assumeva una forma semplificata: da quattro parametri  $W$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $M$ , ci si poteva ricondurre ad un potenziale con due parametri.

Infatti, come si è visto nel capitolo 4.2.2 nell'equazione (4.6), l'espressione del potenziale di Gogny semplificato per la materia neutronica assume la seguente forma

$$V(\mathbf{r}) = (W + BP_\sigma - H - MP_\sigma)e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (5.31)$$

Separando fra loro i termini che hanno una dipendenza da  $P_\sigma$ , da quelli che ne sono privi, si può scrivere l'espressione (5.54) come

$$V(\mathbf{r}) = [(W - H) + (B - M)P_\sigma]e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (5.32)$$

Se si introducono i parametri  $\alpha$  e  $\beta$  così definiti

$$\alpha := W - H \quad (5.33)$$

$$\beta := B - M \quad (5.34)$$

l'espressione (5.32) diventa

$$V(\mathbf{r}) = [\alpha + \beta P_\sigma]e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (5.35)$$

Si tratta ora di servirsi di due proprietà fisiche, di cui sono noti sperimentalmente i valori, in corrispondenza di un valore ben preciso di densità  $\rho_0$ , per poter determinare i parametri  $\alpha$  e  $\beta$ . Le proprietà di cui ci si è serviti sono i valori che assumono l'equazione di stato della materia neutronica  $e_n(\rho)$ , e il parametro di pendenza  $L(\rho)$ , in corrispondenza della densità di saturazione  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ . I valori sperimentali di queste grandezze, come si è già visto nella sezione 5.2, sono:

$$\begin{cases} e_n(\rho_0) = 16 \text{ MeV} \\ L = 3\rho_0 \left. \frac{\partial e_n(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} = 60 \text{ MeV} \end{cases} \quad (5.36)$$

Sostituendo ora nel sistema (5.36) l'espressione dell'EOS per la materia neutronica (4.29), si giunge al seguente sistema

$$\begin{cases} e_n(\rho_0) = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{F^n}^2}{2m_N} \Big|_{\rho_0} + \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 A_1 \rho_0 + \frac{1}{2} B_n g(\mu k_{F^n})|_{\rho_0} = 16 \text{ MeV} \\ L(\rho_0) = 3\rho_0 \frac{\partial e_n(\rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} \\ = 3\rho_0 \left[ \frac{2}{5} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_N} \rho_0^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 A_1 + \frac{1}{2} B_n \frac{\partial g(\mu k_{F^n})}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} \right] \\ = 3\rho_0 \left[ \frac{2}{5} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_N} \rho_0^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 A_1 + \frac{1}{2} B_n g'(\rho)|_{\rho_0} \right] \\ = 60 \text{ MeV} \end{cases} \quad (5.37)$$

Dove

$$\begin{aligned} g'(\rho) &= \frac{-2}{\mu^3} (3\pi^2)^{-1} \rho^{-2} + \frac{1}{\mu} (3\pi^2)^{-\frac{1}{3}} \rho^{-\frac{4}{3}} \\ &+ \left[ \frac{2}{\mu^3} (3\pi^2)^{-1} \rho^{-2} + \frac{1}{\mu} (3\pi^2)^{-\frac{1}{3}} \rho^{-\frac{4}{3}} \right] e^{-\mu^2 (3\pi^2 \rho)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Risolvendo il sistema (5.37) in modo analitico, si ottiene:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \rho_0} \left[ 32 - 2g(\mu k_{F^n}) \left( \frac{20}{\rho_0} - \frac{2}{5} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_N} \rho_0^{-\frac{1}{3}} \right) \right] \left[ 1 - \frac{g}{\rho g'(\rho)} \right]^{-1} \Big|_{\rho_0} \\ B_1 = \left[ \frac{20}{\rho_0} - \frac{2}{5} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_N} \rho_0^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 A_1 \right] \Big|_{\rho_0} \left[ \frac{2}{g'(\rho)} \right] \Big|_{\rho_0} \end{cases}$$

L'unico parametro ancora da fissare, rimane il range  $\mu$ . Tuttavia, facendo riferimento all'articolo [Sellahewa and Rios, 2014], si è deciso di assumere  $0.6 \text{ fm} < \mu < 1.2 \text{ fm}$ , considerando passi incrementali di  $0.1 \text{ fm}$  e, in corrispondenza di ogni singolo valore, si è proceduto con la determinazione dei parametri  $A_1$  e  $B_1$ .

Poiché nell'espressione dell'interazione (5.35), compaiono i parametri  $\alpha$  e  $\beta$ , una volta determinati i parametri  $A_1$  e  $B_1$ , sono stati calcolati anche i parametri  $\alpha$  e  $\beta$ , perché legati ai parametri  $A_1$  e  $B_1$  da relazioni matematiche ben precise. Ricordando infatti che i coefficienti  $A_1$  e  $B_1$  erano definiti come:

$$\begin{cases} A_1 = W + \frac{B}{2} - H - \frac{M}{2} \\ B_1 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} (W + 2B - H - 2M) \end{cases}$$

è possibile riscrivere le espressioni (5.33) e (5.34) in funzione dei parametri  $A_1$  e  $B_1$ , nel seguente modo:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}(4A_1 + \sqrt{\pi}B_1) \\ \beta = \frac{2}{3}(-\sqrt{\pi}B_1 - A_1) \end{cases}$$

Di seguito sono riportati i valori dei parametri ottenuti al variare del range d'interazione  $\mu$ .

| $\mu(\text{fm})$ | $A_1(\text{MeV})$ | $B_1(\text{MeV})$ | $\alpha(\text{MeV})$ | $\beta(\text{MeV})$ |
|------------------|-------------------|-------------------|----------------------|---------------------|
| 0.6              | 716.383           | -1373.490         | 143.693              | 1145.380            |
| 0.7              | 318.370           | -731.492          | -7.686               | 652.111             |
| 0.8              | 156.007           | -438.730          | -51.199              | 414.414             |
| 0.9              | 82.293            | -288.549          | -60.757              | 286.098             |
| 1.0              | 45.975            | -204.183          | -59.336              | 210.620             |
| 1.1              | 26.891            | -153.249          | -54.688              | 163.157             |
| 1.2              | 16.328            | -120.652          | -49.513              | 131.682             |

Tabella 5.3: Valori dei parametri del potenziale di Gogny al variare del range  $\mu$ , per la materia puramente neutronica

Dalla tabella 5.3 emerge che tutti i valori del parametro diretto  $A_1$  sono sempre positivi; mentre i valori che assume il parametro di scambio  $B_1$  sono tutti negativi. Inoltre emerge che, all'aumentare del range d'interazione  $\mu$  del potenziale, sia i valori numerici del parametro  $A_1$ , che quelli del parametro  $B_1$ , diminuiscono. Sembrerebbe, pertanto che, valori del range grandi, contribuiscono ad affievolire la forza. Probabilmente, matematicamente, questo è dovuto al fatto che una quantità fisicamente significativa sia

$$\int d_3r V(r) \quad (5.39)$$

cioè l'integrale di volume dell'interazione deve essere invariante, al variare del range d'interazione  $\mu$ . Infatti, questa quantità compare espressamente nel termine diretto dell'equazione di stato attraverso il termine  $\mu^3$ .

Per i valori riportati nella tabella 5.3, sono stati calcolati i valori di  $e_n(\rho_0)$ , e  $L(\rho_0)$ , e vengono mostrati nella tabella sottostante. Tutte le grandezze sono misurate in MeV.

Nella figura 5.3 è mostrato il grafico dell'andamento dell'EOS della materia puramente neutronica, per i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  corrispondenti al range  $\mu = 0.6 \text{ fm}$ .

| $\mu(\text{fm})$ | $e_n(\text{MeV})$ | $L(\text{MeV})$ |
|------------------|-------------------|-----------------|
| 0.6              | 15.99             | 59.99           |
| 0.7              | 15.99             | 59.99           |
| 0.8              | 15.99             | 59.99           |
| 0.9              | 15.99             | 59.99           |
| 1.0              | 15.99             | 59.99           |
| 1.1              | 16.00             | 59.99           |
| 1.2              | 16.00             | 60.00           |

Tabella 5.4: Valori delle proprietà della materia nucleare puramente neutronica, calcolate per valori di  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ , al variare del range  $\mu$

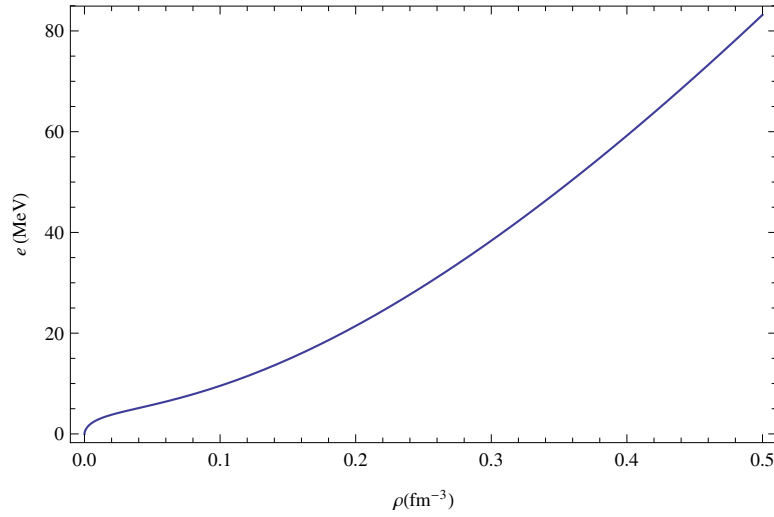


Figura 5.3: Equazione di stato per la materia puramente neutronica al variare della densità, per valori dei parametri determinati in corrispondenza del valore  $\mu = 0.6 \text{ fm}$

### 5.3 Fit

Poiché non è stato possibile utilizzare come vincolo il modulo di incompressibilità  $K_\infty$  per la determinazione dei parametri  $W$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $M$ , si è ritenuto opportuno esplorare il range di valori che il parametro di pendenza  $L$  e il modulo di incompressibilità  $K_\infty$  possono assumere al fine di riprodurre le proprietà della materia nucleare a fissata densità  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$  e a range d'interazione fissato  $\mu = 0.6 \text{ fm}$ . In particolare, ci si è serviti dell'algoritmo "MIGRAD" [James] per effettuare i fit su queste quantità. Come indice di bontà del fit, si è utilizzata la funzione  $\chi^2$ , definita nel modo seguente

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{O_i^{rif} - O_i^{teo}}{\sigma_i} \right)^2 \quad (5.40)$$

dove con  $O_i^{rif}$  si è indicato il valore sperimentale della grandezza fisica; mentre con  $O_i^{teo}$  si è indicato il valore teorico della grandezza fisica. Inoltre, il parametro  $\sigma_i$  è definito nel modo seguente

$$\sigma_i = \epsilon O_i^{rif} \quad (5.41)$$

dove  $\epsilon$  è l'errore relativo del valore sperimentale  $O_i^{rif}$ .

Utilizzando questo software, si è quindi proceduto con il calcolo dei fit.

Dapprima si è fissato il modulo di incompressibilità  $K_\infty = 240$  MeV e si è fatto variare il parametro  $L$  e, in corrispondenza di ciascuno di questi valori, si è proceduto con il fit dei parametri  $W$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $M$ .

I risultati vengono mostrati nella tabella 5.5. Si noti come i parametri

| L(fm) | W(MeV)  | B(MeV)   | H(MeV)  | M (MeV)  |
|-------|---------|----------|---------|----------|
| 30    | 6975.43 | -7559.36 | 7091.81 | -8059.30 |
| 40    | 6371.75 | -6740.54 | 6401.44 | -7455.62 |
| 50    | 5768.11 | -5921.76 | 5711.10 | -6851.97 |
| 60    | 5164.45 | -5102.98 | 5020.76 | -6248.33 |
| 70    | 4560.79 | -4284.18 | 4330.40 | -5644.66 |
| 80    | 3957.15 | -3465.40 | 3640.07 | -5041.02 |

Tabella 5.5: Valori dei parametri del potenziale di Gogny, al variare del parametro di pendenza  $L(\rho_0)$ , a range d'interazione fissato  $\mu = 0.6$  fm, a densità fissata  $\rho_0 = 0.16$  fm<sup>-3</sup>

$W$  e  $H$  siano sempre positivi, mentre i parametri  $B$  ed  $M$  siano sempre negativi, come era stato ottenuto nella sezione 5.2, imponendo il valore del parametro di pendenza della materia neutronica e le altre proprietà nucleari in corrispondenza del punto di saturazione. Per i valori assunti dai parametri  $W$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $M$  in corrispondenza del rispettivo valore assunto da  $L$ , si è proceduto col calcolo di alcune proprietà della materia nucleare in corrispondenza della densità di saturazione  $\rho_0 = 0.16$  fm<sup>-3</sup> e per il valore del range d'interazione  $\mu = 0.6$  fm. Queste proprietà sono: l'energia per unità di nucleone per la materia nucleare simmetrica  $e_s(\rho_0)$ , l'energia per unità di neutrone per la materia nucleare puramente neutronica  $e_n(\rho_0)$ , il parametro di pendenza per la materia puramente neutronica  $L(\rho_0)$  e il modulo di incompressibilità  $K_\infty$ . Nella tabella 5.6 sono mostrati i risultati ottenuti.

Dai risultati si evince che i valori che il parametro  $L$  può assumere affinché si possano riprodurre le proprietà più importanti della materia nucleare, in accordo con i dati sperimentali, sono molti: si ha un range di variazione di 50 MeV circa.

In seguito, si è provato ad indagare il range di valori che il modulo di incompressibilità può assumere, in modo tale da riprodurre i valori delle seguenti proprietà nucleari: energia per unità di nucleone per la materia nucleare simmetrica  $e_s(\rho_0)$ , energia per unità di neutrone per la materia

| L(fm) | $e_s$ (MeV) | $e_n$ (MeV) | $K_\infty$ (MeV) |
|-------|-------------|-------------|------------------|
| 30    | -16.00      | 15.99       | 240.06           |
| 40    | -16.00      | 16.00       | 240.06           |
| 50    | -16.00      | 16.00       | 240.06           |
| 60    | -16.00      | 16.00       | 240.06           |
| 70    | -16.00      | 16.00       | 240.06           |
| 80    | -16.00      | 16.00       | 240.06           |

Tabella 5.6: Valori dei parametri del potenziale di Gogny, al variare del parametro di pendenza  $L(\rho_0)$ , a range d'interazione fissato  $\mu = 0.6$  fm, a densità fissata  $\rho_0 = 0.16$  fm $^{-3}$

nucleare neutronica  $e_n(\rho_0)$ , parametro di pendenza per la materia neutronica  $L(\rho_0)$ , modulo di incompressibilità  $K_\infty(\rho_0)$ , calcolati a range fissato  $\mu$  fissato a 0.6 fm e a densità di saturazione  $\rho_0 = 0.16$  fm $^{-3}$ .

I risultati vengono mostrati nella tabella 5.7.

| $K_\infty$ (MeV) | W(MeV)  | B(MeV)   | H(MeV)  | M (MeV)  |
|------------------|---------|----------|---------|----------|
| 240              | 5156.00 | -5164.99 | 5053.28 | -6205.38 |
| 250              | 5156.54 | -5139.17 | 5038.64 | -6218.40 |

Tabella 5.7: Valori dei parametri del potenziale di Gogny, al variare del modulo di incompressibilità  $K_\infty(\rho_0)$ , a range d'interazione fissato  $\mu = 0.6$  fm, a densità fissata  $\rho_0 = 0.16$  fm $^{-3}$

L'intervallo in cui  $K_\infty$  può variare, è piuttosto ristretto.

Nella tabella 5.6 sono stati riportati solo i valori di  $K_\infty$  per i quali si è avuta la convergenza nel calcolo dei fit. Infatti, partendo dal valore  $K_\infty = 220$  MeV, si è proceduto col fit dei parametri W, B, H, M incrementando di 10 MeV alla volta il valore di  $K_\infty$  di volta in volta. È risultato che solo i valori di  $K_\infty$  riportati nella tabella 5.7 sono stati in grado di dare dei risultati accettabili per i parametri W, B, H, M in modo tale da riprodurre le proprietà della materia nucleare a range fissato  $\mu = 0.6$  fm e a densità fissata  $\rho_0 = 0.16$  fm $^{-3}$ . In corrispondenza dei valori assunti da parametri W, B, H, M riportati nella tabella 5.6, sono state calcolate alcune proprietà della materia nucleare: modulo di incompressibilità  $K_\infty$ , energia per unità di nucleone per la materia simmetrica  $e_s$ , energia per unità di neutrone per la materia neutronica  $e_n$  e parametro di pendenza L per la materia neutronica. Nella tabella 5.8 vengono mostrati i risultati ottenuti.

## 5.4 Massa efficace

Verranno calcolate e presentate le espressioni analitiche della massa efficace sia per il caso di materia nucleare simmetrica, che per quello di materia

| $K_\infty(\text{MeV})$ | $e_s(\text{MeV})$ | $e_n(\text{MeV})$ | $L(\text{MeV})$ |
|------------------------|-------------------|-------------------|-----------------|
| 256                    | -15.00            | 16.00             | 54.99           |
| 262                    | -15.36            | 16.00             | 56.84           |

Tabella 5.8: Valori dei parametri del potenziale di Gogny, al variare del parametro di pendenza  $L(\rho_0)$ , a range d'interazione fissato  $\mu = 0.6 \text{ fm}$ , a densità fissata  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$

nucleare puramente neutronica. Inoltre, verranno calcolati i valori della massa efficace usando i valori dei parametri  $W$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $M$  ottenuti nella sezione 5.2 al variare del parametro  $\mu$ , sia per la materia simmetrica che per quella puramente neutronica.

#### 5.4.1 Materia simmetrica

Si procederà ora alla determinazione dell'espressione analitica della massa efficace del sistema nel caso di materia simmetrica. Come già visto in (5.19) il potenziale di Gogny semplificato per la materia simmetrica è

$$V(\mathbf{r}) = (W + BP_\sigma - HP_\tau - MP_\sigma P_\tau) e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (5.42)$$

Ricordando che gli operatori  $P_\sigma$  e  $P_\tau$  erano definiti come

$$P_\sigma = \frac{1 + \sigma_1 \sigma_2}{2} \quad (5.43)$$

e

$$P_\tau = \frac{1 + \tau_1 \tau_2}{2} \quad (5.44)$$

e, calcolando la trasformata di Fourier del potenziale di Gogny semplificato (5.40), si ottiene

$$U(k) = \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \rho \left( W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} (W + 2B - 2H - 4M) u(\mu k, \mu k_F) \quad (5.45)$$

Dove  $k = |\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1|$  é il momento relativo fra le particelle e la funzione  $u(\mu k, \mu k_F)$  è definita come

$$u(q, q_F) = \frac{1}{q} \left[ e^{-\frac{(q+q_F)^2}{4}} - e^{-\frac{(q-q_F)^2}{4}} \right] + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ \text{erf}\left(\frac{q+q_F}{2}\right) - \text{erf}\left(\frac{q-q_F}{2}\right) \right] \quad (5.46)$$

dove l'error function è definita come

$$erf(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^x dt e^{-t^2} \quad (5.47)$$

Per poter ricavare l'espressione analitica della massa efficace, bisogna derivare l'equazione (5.45). Si osservi che il termine diretto non contribuisce in tale calcolo, in quanto non dipende da  $k$ . L'espressione trovata risulta essere

$$\frac{m^*}{m_N} = \left[ 1 + \frac{m_N}{\hbar^2} \mu^2 \left( -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) (W + 2B - 2H - 4M) f(\mu k, \mu k_F) \right]^{-1} \quad (5.48)$$

Dove la funzione  $f(\mu k, \mu k_F)$  è definita nel modo seguente

$$f(q, q_F) = \frac{1}{q^3} \left[ (2 - qq_F) e^{-\frac{(q-q_F)^2}{4}} - (2 + qq_F) e^{-\frac{(q+q_F)^2}{4}} \right] \quad (5.49)$$

Solitamente la massa efficace viene calcolata in corrispondenza della rispettiva superficie di Fermi della particella che, nel caso della materia simmetrica, è  $k_F = (\frac{3}{2}\pi^2\rho)^{\frac{1}{3}}$ . Di conseguenza la funzione  $f(q, q_F)$  assume la seguente forma

$$f(q_F, q_F) = \frac{1}{q_F^3} \left[ 2(1 - e^{-q_F^2}) - q_F^2(1 + e^{-q_F^2}) \right] \quad (5.50)$$

#### Risultati

Nella tabella seguente vengono presentati i valori della massa efficace al variare del range  $\mu$

| $\mu(\text{fm})$ | $m^*/m_N$ |
|------------------|-----------|
| 0.6              | 0.3970    |
| 0.7              | 0.4005    |
| 0.8              | 0.4043    |
| 0.9              | 0.4084    |
| 1.0              | 0.4126    |
| 1.1              | 0.4169    |
| 1.2              | 0.4211    |

Tabella 5.9: Valori della massa efficace del protone al variare del range d'interazione  $\mu$  del potenziale generato da una distribuzione di materia nucleare simmetrica

Si noti come i valori del rapporto fra la massa efficace del nucleone e la sua massa stessa ( $m^*/m_N$ ) sia minore di quello che ci si aspetterebbe:  $m^*/m_N \approx 0.7$  [P. Ring and Schuck, 2004]; non solo: si ha un progressivo

aumento di essa all'aumentare del range d'interazione. Dal grafico mostrato in figura si 5.4 evidenzia una dipendenza lineare fra il range  $\mu$  e la massa efficace  $m^*/m_N$ .

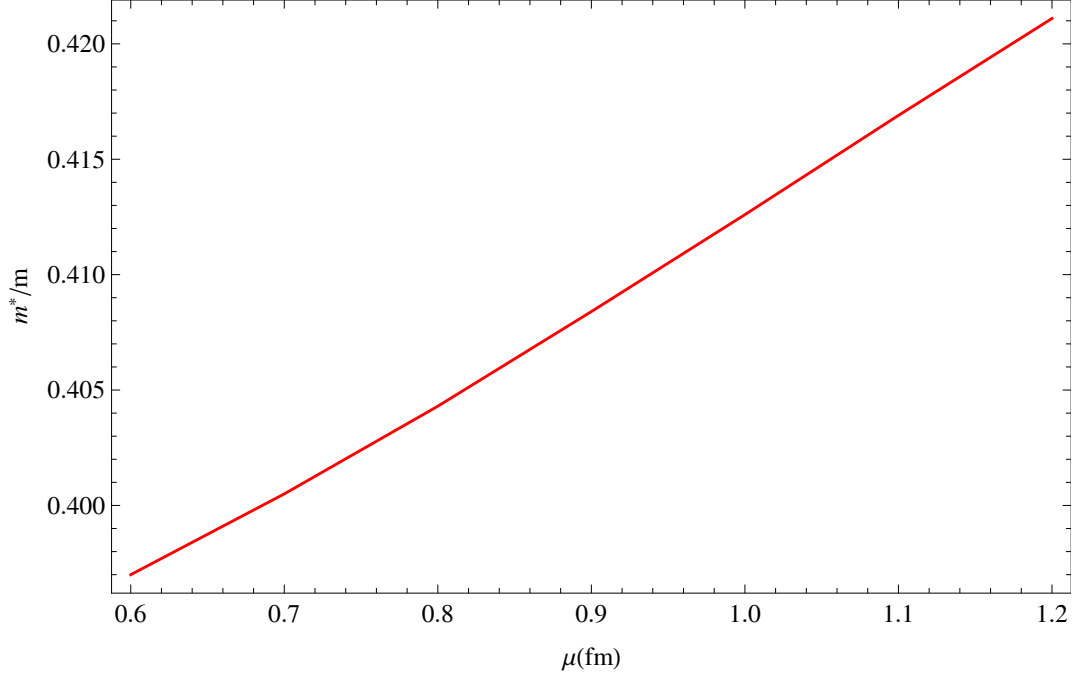


Figura 5.4: Dipendenza della massa efficace dal range  $\mu$ , per la materia nucleare simmetrica

Inoltre, se si cerca di riprodurre la incompressibilità  $K_\infty = 244$  MeV usando i parametri riportati in tabella 5.1, si ottiene

$$\frac{m^*}{m_N} = 0.4043 \quad (5.51)$$

Questo valore è chiaramente minore di 0.7. Questa discrepanza, probabilmente, è da attribuirsi al fatto che l'interazione presa in esame sia stata troppo semplice, pertanto, non in grado di riprodurre tutte le proprietà sperimentali della materia nucleare. Inoltre, si osservi che non sono state utilizzate alcune proprietà di singola particella per la risoluzione delle equazioni utilizzate per la determinazione dei parametri d'interazione W, B, H, M. Probabilmente questo ha influito sul risultato ottenuto. In aggiunta, anche nella tesi di Giacomo Accorto[Accorto], è emerso che  $m^*/m_N$  non era in accordo col valore atteso  $m^*/m_N \approx 0.7$ , ma minore.

L'interazione da lui analizzata è

$$V_{B\&B}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1,2} S_i (1 - m_i + m_i P_M) e^{-\frac{r^2}{\mu_i^2}} \quad (5.52)$$

Partendo dal potenziale preso in esame in questo lavoro

$$V(\mathbf{r}) = W + BP_\sigma - HP_\tau - MP_\sigma P_\tau e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (5.53)$$

è possibile ricondursi al potenziale  $V_{B\&B}$  effettuando le seguenti sostituzioni:  $W = S(1 - m)$ ,  $B = 0$ ,  $H = 0$ ,  $M = Sm$  e osservando che  $P_\sigma P_\tau = -1$ .

Egli ha calcolato la massa efficace per questo potenziale, prima considerando una gaussiana e poi due.

Usando una gaussiana, ha ottenuto come risultato  $m^*/m_N \approx 0.260$ . Confrontando questo valore con quello trovato in questo lavoro, si osserva che si è avuto un miglioramento, probabilmente dovuto al fatto che il nostro modello, con una gaussiana, contiene più parametri e quindi ci si aspettava di ottenere dei risultati leggermente diversi. Inoltre, il tesista Giacomo ha calcolato la massa efficace anche per il potenziale  $V_{B\&B}(\mathbf{r})$ , considerando il contributo di entrambe le gaussiane. Così facendo, ha trovato un valore comunque inferiore al valore atteso. Questo indica che sia il modello di Brink e Boeker sia quello di Gogny semplificato devono essere migliorati se si vuole dare una descrizione accurata della fenomenologia nucleare nota.

#### 5.4.2 Materia neutronica

Come già visto nella sezione (5.32), nel caso della materia puramente neutronica, il potenziale semplificato di Gogny è

$$V(\mathbf{r}) = (W + BP_\sigma - H - MP_\sigma) e^{-\frac{r^2}{\mu^2}} \quad (5.54)$$

Ricordando che gli operatori  $P_\sigma$  e  $P_\tau$  erano definiti come

$$P_\sigma = \frac{1 + \sigma_1 \sigma_2}{2} \quad (5.55)$$

e

$$P_\tau = \frac{1 + \tau_1 \tau_2}{2} \quad (5.56)$$

e, calcolando la trasformata di Fourier del potenziale di Gogny semplificato (5.54), si ottiene

$$U(k) = \pi^{\frac{3}{2}} \mu^3 \rho \left( W + \frac{B}{2} - H - \frac{M}{2} \right) \quad (5.57)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} (W + 2B - H - 2M) u(\mu k, \mu k_F) \quad (5.58)$$

Dove  $k = |\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1|$  è il momento relativo fra le particelle e la funzione  $u(\mu k, \mu k_F)$  è definita come

$$u(q, q_{F^n}) = \frac{1}{q} \left[ e^{-\frac{(q+q_{F^n})^2}{4}} - e^{-\frac{(q-q_{F^n})^2}{4}} \right] + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{q+q_{F^n}}{2}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{q-q_{F^n}}{2}\right) \right] \quad (5.59)$$

dove l'error function è definita come

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^x dt e^{-t^2} \quad (5.60)$$

Per poter ricavare l'espressione analitica della massa efficace, bisogna derivare l'equazione (5.58). Si osservi che il termine diretto non contribuisce in tale calcolo, in quanto non dipende da  $k$ . L'espressione trovata risulta essere

$$\frac{m^*}{m_n} = \left[ 1 + \frac{m_N}{\hbar^2} \mu^2 \left( -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) (W + 2B - H - 2M) f(\mu k, \mu k_{F^n}) \right]^{-1} \quad (5.61)$$

Dove la funzione  $f(\mu k, \mu k_{F^n})$  è definita nel modo seguente

$$f(q, q_{F^n}) = \frac{1}{q^3} \left[ (2 - qq_{F^n}) e^{-\frac{(q-q_{F^n})^2}{4}} - (2 + qq_{F^n}) e^{-\frac{(q+q_{F^n})^2}{4}} \right] \quad (5.62)$$

Solitamente la massa efficace viene calcolata in corrispondenza della rispettiva superficie di Fermi della particella che, nel caso della materia puramente neutronica, è  $k_{F^n} = (3\pi^2 \rho)^{\frac{1}{3}}$ . Pertanto la funzione  $f(q, q_{F^n})$  assume la seguente forma

$$f(q_{F^n}, q_{F^n}) = \frac{1}{q_{F^n}^3} \left[ 2(1 - e^{-q_{F^n}^2}) - q_{F^n}^2 (1 + e^{-q_{F^n}^2}) \right] \quad (5.63)$$

#### Risultati

Nella tabella seguente vengono presentati i valori della massa efficace al variare del range  $\mu$

A differenza della materia simmetrica, in cui ci sono delle verifiche sperimentali che consentono di determinare la massa efficace dei nucleoni, nel caso della materia neutronica, esistono solo dei calcoli teorici in grado di stimarla. In particolare, confrontando i nostri risultati con quelli riportati, ad esempio, nell'articolo [Li et al., 2016], si può concludere che i valori ottenuti sono inferiori. Nella figura 5.5 viene riportato il grafico che mostra la variazione del rapporto fra la massa efficace e la massa del nucleone, al variare del range  $\mu$ , per la materia nucleare neutronica.

| $\mu(\text{fm})$ | $m^*/m_N$ |
|------------------|-----------|
| 0.6              | 0.2811    |
| 0.7              | 0.2954    |
| 0.8              | 0.3111    |
| 0.9              | 0.3279    |
| 1.0              | 0.3453    |
| 1.1              | 0.3627    |
| 1.2              | 0.3798    |

Tabella 5.10: Valori della massa efficace del neutrone al variare del range d'interazione  $\mu$  del potenziale generato da una distribuzione di materia nucleare puramente neutronica

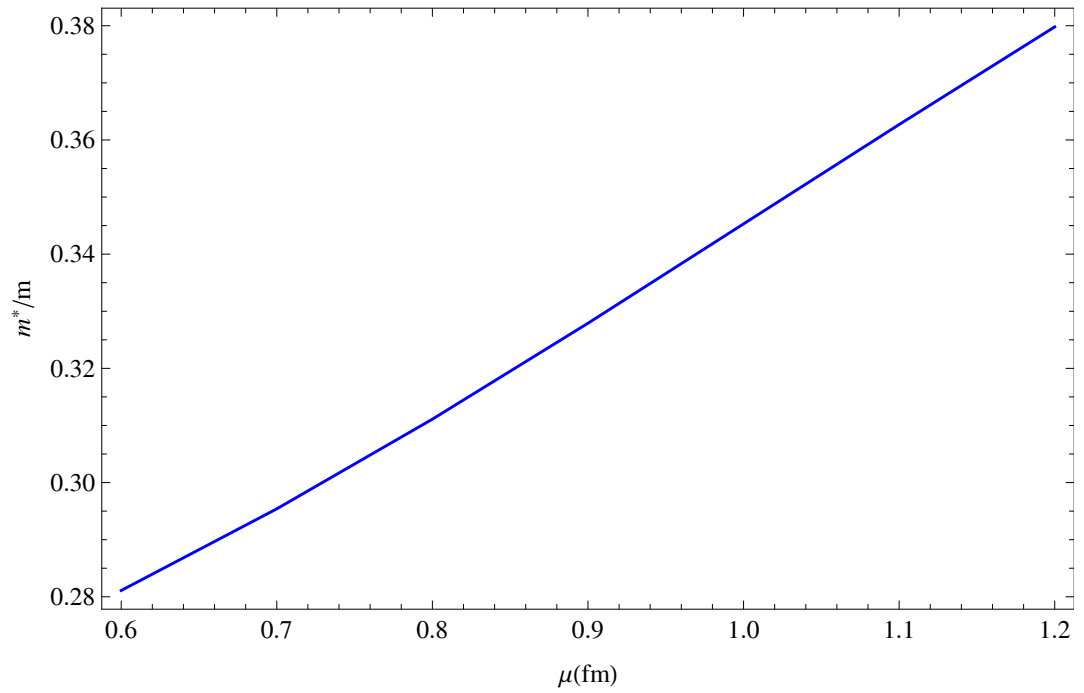


Figura 5.5: Dipendenza della massa efficace dal range  $\mu$ , per la materia nucleare neutronica

## Capitolo 6

# Conclusioni

La determinazione di un potenziale nucleare efficace risolto a livello di campo in grado di descrivere le proprietà nucleari note come la massa o il raggio dei nuclei, continua a rivestire un ruolo cardine nella ricerca scientifica teorica. Per molti anni ci si è serviti di potenziali a range zero per descrivere la fenomenologia nucleare. In letteratura ci sono molti articoli che trattano questi potenziali. Tuttavia essa è ricca di articoli che trattano i potenziali a range finito. Uno di questi articoli, da cui abbiamo tratto ispirazione per il nostro lavoro, è quello di [Sellahewa and Rios, 2014]. In questo elaborato si è voluto indagare se è possibile servirsi di un potenziale fenomenologico nucleare a range finito semplice, costituito da una gaussiana dipendente dal range d'interazione, suddivisa in quattro canali in accordo con la natura fermionica di protoni e neutroni e la simmetria d'isospin, per riprodurre alcune proprietà nucleari in corrispondenza del punto di saturazione nucleare dell'equazione di stato nucleare (EOS). Inoltre, si è voluto studiare il legame che c'è fra il range d'interazione ed alcune proprietà nucleari, sia per l'EOS della materia nucleare simmetrica, che per quella neutronica. Dapprima si sono ricavate le equazioni di stato in ambito della teoria di campo medio. In seguito, ci si è serviti di alcune proprietà fondamentali nucleari di entrambi i tipi di materia, per poter determinare i parametri dell'interazione, al variare del range. Per questo scopo, sono state adottate due modalità d'indagine: nella prima si sono utilizzate le pressioni ed energie nel punto di saturazione nucleare delle EOS di materia simmetrica e neutronica; nella seconda, la pressione di materia neutronica nel punto di saturazione, è stata sostituita dalla compressibilità della materia simmetrica a saturazione. Dalla prima modalità è stato trovato che:

- all'aumentare del range d'interazione, si ha una diminuzione dei parametri che compaiono nell'equazione di stato della materia nucleare simmetrica e neutronica;
- all'aumentare del range d'interazione, si ha una diminuzione del modulo di incompressibilità.

Poiché nella seconda modalità ci si è scontrati con l'indeterminatezza del sistema risolvibile, si è proceduto con un fit. Dai risultati del fit è risultato che:

- all'aumentare del range d'interazione, si ha una diminuzione dei parametri che compaiono nell'equazione di stato della materia nucleare simmetrica e neutronica;
- facendo variare il parametro di pendenza con range d'interazione fissato e a densità di saturazione, il valore del modulo di incompressibilità rimane costante, intorno ai 240.06 MeV;
- facendo variare il parametro di pendenza con range d'interazione fissato e a densità di saturazione, l'energia di legame per la materia simmetrica e neutronica, non varia.

Quindi, è possibile dare delle condizioni meno restrittive sul valore del parametro  $L$  che caratterizza la pressione neutronica alla saturazione nucleare, al fine di riprodurre le proprietà nucleari.

Il nostro modello si è mostrato efficiente nella riproduzione delle proprietà delle equazioni di stato sia per la materia nucleare simmetrica, che per quella neutronica, eccetto per l'incompressibilità e la massa efficace. Le equazioni di stato e il parametro di pendenza non sono influenzate dal variare del range d'interazione; mentre l'incompressibilità sì: si ha una diminuzione in corrispondenza del suo aumento.

Per quanto riguarda le quantità in relazione con le proprietà di singola particella, come la massa efficace, bisogna distinguere i risultati ottenuti per la materia simmetrica, da quella neutronica. In entrambi i casi, sono stati riportati dei valori inferiori a quelli riportati in letteratura e, all'aumentare del range d'interazione, si è riscontrato un leggero aumento della massa efficace. In particolare, si ha una dipendenza lineare fra la massa efficace e il range. Il modello di potenziale adottato non è risultato pertanto in grado di riprodurre i valori attesi della massa efficace. Si ritiene pertanto che sia necessario apportare una miglioria all'interazione. Una possibilità sarebbe quella di servirsi di un'interazione costituita dalla somma di due funzioni gaussiane, anziché da una gaussiana soltanto. Si aggiunga inoltre che, mentre per quanto riguarda la massa efficace per la materia simmetrica, in letteratura sono riportati valori ottenuti sperimentalmente, non si può dire lo stesso per la materia neutronica: esistono solo lavori teorici in grado di stimare la massa efficace, ma non esistono esperimenti in grado di confutarli. Questo perché, in natura, non esistono sistemi costituiti solo da neutroni. L'unico oggetto che più si avvicina ad essi sono le stelle di neutroni.

Sarebbe pertanto interessante studiare diversi approcci teorici, per cercare di capire in cosa difetti il nostro modello di potenziale. Inoltre, si potrebbe estendere lo studio della dipendenza dal range d'interazione, delle proprietà

nucleari per entrambi i tipi di materia, considerando un potenziale a range finito costituito da due o anche più gaussiane. Un altro lavoro interessante sarebbe quello di stabilire il numero minimo di gaussiane necessarie al fine di riprodurre le proprietà nucleari attese e, se questo non fosse possibile, indagare quale tipo d'interazione dovrebbe essere formulata. Inoltre, si potrebbe vedere il ruolo che gioca il termine dipendente dalla densità, che non è stato considerato in questo elaborato. Questi spunti si prestano per altri ed eventuali lavori di tesi.

## Appendice A

# Appendice: calcolo del volume d'intersezione fra due sfere di raggio qualsiasi

Si considerino due sfere di raggio di raggio  $r$  e  $r'$ , rispettivamente e centro  $C$  e  $C'$ . Per semplicità centriamo la prima sfera nell'origine e poniamo la seconda a una distanza  $d$ , effettuando una traslazione lungo l'asse delle  $x$  e lasciando invariati gli altri assi, in modo tale che le due si intersechino in una certa regione di volume  $V$ .

Si noti che ci si può sempre ricondurre al tale configurazione, effettuando delle traslazioni.

A questo punto, si tratta di calcolare il punto di intersezione delle due sfere, risolvendo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ (x - d)^2 + y'^2 + z^2 = r'^2 \end{cases}$$

Dove la prima equazione è l'equazione della prima sfera e, la seconda, quella della sfera traslata. La soluzione /e'  $x_0 := x = \frac{d^2 + r^2 - r'^2}{2d}$ . L'equazione del cerchio, che è la curva che si ottiene dall'intersezione è  $y^2 + z^2 = r^2 - x^2$ , la cui area è  $A = \pi(r^2 - x^2)$ . Infine, per calcolare  $V$ , calcolo  $V_1$ ,  $V_2$  e li sommo:

$$V_1 = \pi \int_{x_0}^{r'} dx (r^2 - x^2) = \pi r^2(r' - x_0) - \frac{\pi}{3}(r'^3 - x_0^3) \quad (\text{A.1})$$

$$V_2 = \pi \int_{x_0}^r dx (r^2 - x^2) = \pi r^2(r - x_0) - \frac{\pi}{3}(r^3 - x_0^3) \quad (\text{A.2})$$

$$V = V_1 + V_2 = \pi r^2(r + r' - 2x_0) - \frac{\pi}{3}(r^3 + r'^3 - 2x_0^3) \quad (\text{A.3})$$

*APPENDICE A. APPENDICE: CALCOLO DEL VOLUME D'INTERSEZIONE FRA DUE SFERE*

E se  $r=r'$ , si ha

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{d}{2r} + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{2r} \right)^3 \right] \quad (\text{A.4})$$

# Bibliografia

- Wolfram language and system. URL <https://reference.wolfram.com/language>. "available online".
- Nist. URL [physics.nist.gov/cuu/Constants/Table/allascii.txt](https://physics.nist.gov/cuu/Constants/Table/allascii.txt). "available online".
- Giacomo Accorto. Sensitivity of nuclear matter properties to the range of the effective interaction. "tesi triennale".
- John Dirk Walecka Alexander L. Fetter. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. 2003.
- V. Bernard and C. Mahaux. Self-energy in a semirealistic model of nuclear matter. *Physical Review C*, 23(2), 1980.
- Carlos A. Bertulani. *Nuclear Physics in a Nutshell*. Princeton University Press, 2007.
- J. P. Blaizot. Nuclear compressibilities. *Physics Reports*, 4:173–246, 1980.
- Aage Bohr and Ben R. Mottelson. *Nuclear structure*. World Scientific, 1999.
- D. M. Brink and E. Boeker. Effective interactions for hartree-fock calculations. *Nuclear physics A*, 91:1–25, 1967.
- Lie-Wen Chen, Che Ming Ko, Bao-An Li, Chang Xu, and Jun Xu. Probing isospin-and momentum-dependent nuclear effective interactions in neutron rich matter. *The European Physical Journal*, 50(29):14029–6, 2014a.
- Lie-Wen Chen, Bao-An Li, and Chang Xu. Relationship between the symmetry energy and the single-nucleon potential in isospin-asymmetric nucleonic matter. *The European Physical Journal*, 50(21):14021–2, 2014b.
- Ashok Das and Thomas Ferbel. *Introduction to Nuclear and Particle Physics*. John Wiley & Sons, 2003.
- J. Dechargé and D. Gogny. Hartree-fock-bogolyubov calculations with the d1 effective interaction on spherical nuclei. *Physical Review C*, 21(4): 1568–1593, 1980.

- D.Vautherin and D.M.Brink. Hartree-fock calculations with skyrme's interaction.i.spherical nuclei. *Physical Review C*, 5(3), March 1972.
- F. James. Minuit: Function minimization and error analysis.
- Kenneth S. Krane. *Introductory Nuclear physics*. John Wiley & Sons, second edition, 1955.
- A. Li, J.N. Hu, X. L. Shang, and W. Zuo. Nonrelativistic nucleon effective masses in nuclear matter: Bhf versus rhf. *arXiv*, January 2016.
- M.Bender, P.H.Heenen, and P.G.Reinhard. Self-consistent mean-field models for nuclear structure. *Review of Modern Physics*, 75:121–180, January 2003.
- Guido Molinari. Hartree. URL [www.teor.mi.infn.it/molinari/NOTES/Hartree.pdf](http://www.teor.mi.infn.it/molinari/NOTES/Hartree.pdf). "available online".
- J. Piekarewicz. Simmetry energy constraints from giant resonances: A relativistic mean-field theory overview. *The European Physical Journal*, 50(25):14025–x, 2104.
- P.Ring and P. Schuck. *The Nuclear Many-Body Problem*. Springer, second edition, 2004.
- Samuel S. and M. wong. *Introductory Nuclear Physics*. Wiley-VCH and Verlag GmbH, 2007.
- Roshan Sellahewa and Arnau Rios. Isovector properties of the gogny interaction. *Physical Review C*, 90:054327, 2014.
- T.H.R. Skyrme. The effective nuclear potential. *Nuclear Physics*, 9.4:615–634, 1958-1959.
- X. Viñas, M. Centelles, X. Roca-Maza, and M. Warda. Density dependence of the simmetry energy from neutron skin thickness in finite nuclei. *The European Physical Journal*, 50(27):14027–8, 2014.

# Ringraziamenti

Un sincero ringraziamento va al Dott. Xavier Roca-Maza e al Prof. Gianluca Colò, per avermi dato la possibilità di scoprire questo filone di ricerca e per avermi seguito con assiduità in questi mesi, mostrandosi sempre disponibili.

Un sentito ringraziamento va ai miei genitori che, senza di loro, questo mio sogno non si sarebbe potuto avverare e li ringrazio per il sostegno che mi hanno sempre dato e per la pazienza che hanno mostrato.

Un ringraziamento speciale a Sally che mi ha sempre sostenuto e c'è sempre stata.

Un ringraziamento finale va a tutti gli amici, in particolare ad Eugenio, amico e compagno di università, non che di arrampicata per i consigli che mi ha dato sull'utilizzo di Latex; ed alla mia amica di università Giulia, per le brevi e piacevoli conversazioni avute con lei durante il tragitto in treno.